Kdo corrigé du 4/02/2026

E.v.n.

3 février 2026

Au chapitre IV, le théorème de Cayley & Hamilton ▷ **théorème IV.26** a été prouvé en utilisant une matrice compagnon. ▷ **exo 5 du TD nº 4**. En voici une autre preuve, qui utilise la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ▷ **exo 11 du TD nº 11**.

Exercice.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, si D est une matrice diagonalisable, alors $\chi_D(D) = 0$.
2. En déduire que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(A) = 0$.

---

1. Si la matrice D est diagonalisable, alors le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(D)} (X - \lambda)$ est annulateur de la matrice D (▷ **revoir le théorème 31(iii) du chapitre IV et sa preuve**) et donc, *a fortiori*, le polynôme caractéristique $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(D)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ aussi.

2. En reprenant les notations de ▷ **l'exo 11 du TD 11**, soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \min\limits_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j|$. On définit, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, une matrice
$$A_k = A - \operatorname{diag}\left(\frac{\varepsilon}{k}, \frac{\varepsilon}{2k}, \cdots, \frac{\varepsilon}{nk}\right)$$
qui est diagonalisable car ses valeurs propres sont distinctes deux à deux. Par suite
$$0 = \chi_{A_k}(A_k) = \prod_{i=1}^{n} \left[(\lambda_i - \frac{\varepsilon}{ik})I_n - A_k\right]$$
d'après la question précédente. Or
$$\prod_{i=1}^{n} \left[(\lambda_i - \frac{\varepsilon}{ik})I_n - A_k\right] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i I_n - A) = \chi_A(A)$$
car la fonction $[\mathcal{M}_n(\mathbb{C})]^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ (M_1, \cdots, M_n) \to M_1 \cdots M_n$ est multilinéaire sur un *ev* de dimension finie, donc continue. Or $0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par unicité de la limite, $\chi_A(A) = 0$.