Chapitre XVIII Fonctions de deux variables

XVIII.1 Courbes de niveau

Une même courbe peut être définie de trois manières : par une équation implicite, comme une courbe paramétrée ou comme l'intersection de deux surfaces.

Exemple 1 — *Dans le plan* $\mathbb{R}^2$*, soit* $\mathcal{C}$ *le cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* 1 *:*

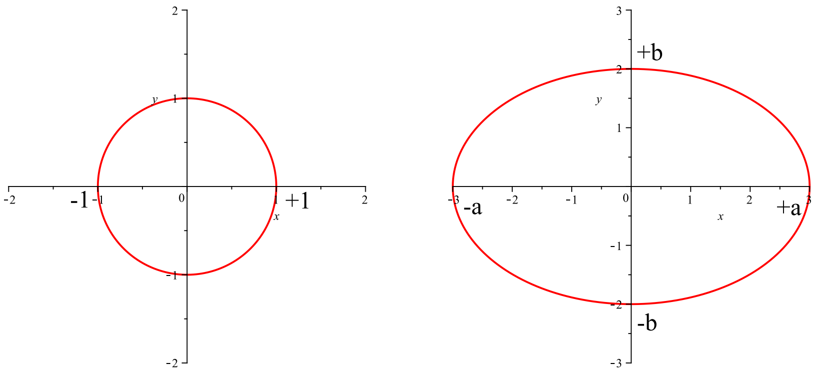
$$(x,y) \in \mathcal{C} \iff x^2+y^2=1 \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} .$$

Plus généralement : soient deux réels $a>0$ *et* $b>0$*. La courbe* $\mathcal{E}$ *d'équation implicite*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

est appelée une ***ellipse****. Elle est représentée sur la figure XVIII.1 et c'est aussi une courbe paramétrée :*

$$(x,y) \in \mathcal{E} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} .$$



$X^2+Y^2=1$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Figure XVIII.1 – Cercle & ellipse

Preuve — *L'ellipse* $\mathcal{E}$ *et le cercle* $\mathcal{C}$ *sont liés par un changement de variables :*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff X^2+Y^2=1, \qquad \textit{où} \quad \begin{cases} X = x/a \\ Y = y/b \end{cases} .$$

□

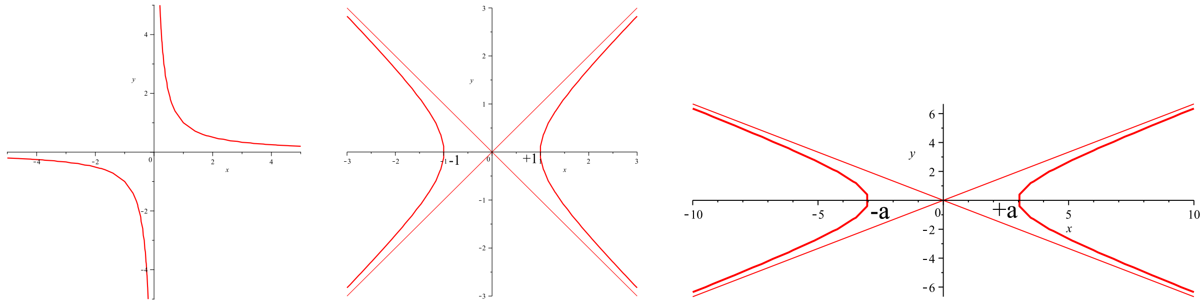
Exemple 2 — *Soient deux réels* $a>0$ *et* $b>0$*. La courbe* $\mathcal{H}$ *d'équation implicite*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

est appelée une ***hyperbole****. Elle est représentée sur la figure XVIII.2. Cette hyperbole est la réunion de deux* ***branches*** *:* $\mathcal{H}_+ = \{(x,y) \in \mathcal{H} \mid x \geq 0\}$ *et* $\mathcal{H}_- = \{(x,y) \in \mathcal{H} \mid x \leq 0\}$*. La branche* $\mathcal{H}_+$ *est une courbe paramétrée :*

$$(x,y) \in \mathcal{H}+ \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\, t \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t \end{cases} .$$

L'hyperbole $\mathcal{H}$ possède deux asymptotes d'équations $\dfrac{y}{b} = \dfrac{x}{a}$ *et* $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a}$.



$V = \dfrac{1}{U}$ $\qquad$ $X^2 - Y^2 = 1$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Figure XVIII.2 – Hyperboles

Preuve — *Pour tracer la figure, on utilise deux changements de variables :*

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad X^2 - Y^2 = 1, \qquad \text{où} \quad \begin{cases} X = x/a \\ Y = y/b \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad U \cdot V = 1, \qquad \text{où} \quad \begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases} . \\
&\Longleftrightarrow \quad V = \frac{1}{U}
\end{aligned}$$

L'hyperbole d'équation $V = \dfrac{1}{U}$ *possède deux asymptotes : l'axe des* U*, d'équation* $V = 0$ *et l'axe des* V*, d'équation* $U = 0$. *Grâce aux changements de variables, on trouve les équations des asymptotes de* $\mathcal{H}$ *:*

$$V = 0 \iff Y = X \iff \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \qquad \text{et} \qquad U = 0 \iff Y = -X \iff \frac{y}{b} = -\frac{x}{a}.$$

Pour paramétrer la branche $\mathcal{H}_+$*, on utilise le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique : pour chaque réel* y*, il existe* $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $\dfrac{y}{b} = \operatorname{sh} t$ *car la fonction* sh *est surjective. Puis* $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$. *D'où* $\dfrac{x}{a} = \pm \operatorname{ch} t$. *Or* x *est positif sur la branche* $\mathcal{H}_+$. *Donc* $\dfrac{x}{a} = \operatorname{ch} t$. *Réciproquement : si* $x = a \operatorname{ch} t$ *et* $y = b \operatorname{sh} t$*, alors* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. □

Une troisième manière de définir une courbe est l'intersection de deux surfaces :

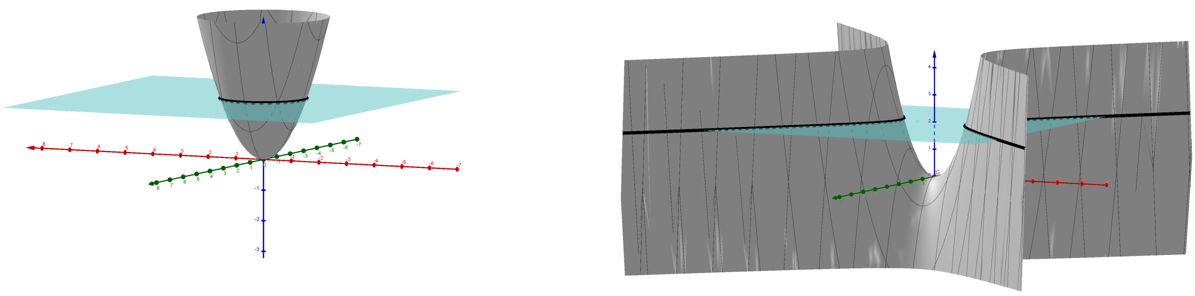


Figure XVIII.3 – L'intersection d'un paraboloïde et d'un plan (à gauche), d'une selle de cheval et d'un plan (à droite)

Exemple 3 — *1. Une droite est l'intersection de deux plans.*

*2. Un cercle est l'intersection d'**un paraboloïde** et d'un plan :*

$$x^2 + y^2 = 1 \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} .$$

*3. Une hyperbole est l'intersection d'**une selle de cheval** et d'un plan :*

$$x^2 - y^2 = 1 \iff \begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Une fonction f de deux variables associe à chaque point (x, y) un nombre réel $f(x, y)$. Par exemple : si f mesure la température ou la pression, alors $f(x, y)$ sera la température ou la pression au point (x, y).

Exercice 4 — *Soit $f(x, y) = \ln(y - x^2) + \sqrt{x - y^2}$. Hachurer dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble de définition D de cette fonction f.*

Définition 5

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ une partie du plan et $f : D \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur D. Pour chaque réel K, la **courbe de niveau** K de la fonction f est l'ensemble des points $(x, y) \in D$ tels que

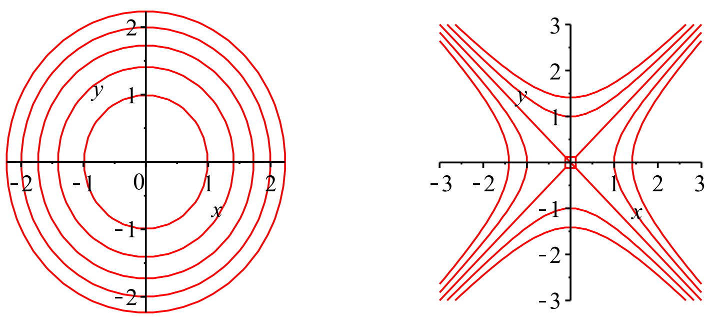
$$f(x, y) = K.$$

Exemple 6 — *1. Le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et de centre (0,0) est la courbe de niveau 1 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Si on change le niveau, alors le rayon du cercle change (figure XVIII.4) :*

$$f(x, y) = K \iff x^2 + y^2 = K$$

est l'équation du cercle de rayon $\sqrt{K}$ si $K \geq 0$, l'ensemble vide si $K < 0$. Changer le niveau K équivaut aussi à changer la hauteur du plan d'équation $z = K$ dans la figure XVIII.3.

2. L'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est la courbe de niveau 1 de la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. En changeant le niveau K, on change la hauteur du plan d'équation $z = K$ dans la figure XVIII.3 et on obtient d'autres hyperboles représentées sur la figure XVIII.4.



$x^2 + y^2 = K$ $\quad$ $K \in [\![1, 5]\!]$

$x^2 - y^2 = K$ $\quad$ $K \in [\![-2, +2]\!]$

Figure XVIII.4 – Courbes de niveaux

XVIII.2 Ouverts

Pour étudier les variations d'une fonction f de deux variables, on se déplace dans le plan. D'après la définition 5, si on se déplace le long d'une courbe de niveau, alors la fonction ne varie pas. Par exemple : si f mesure la température ou la pression, alors la courbe de niveau sera une isotherme ou une isobare.

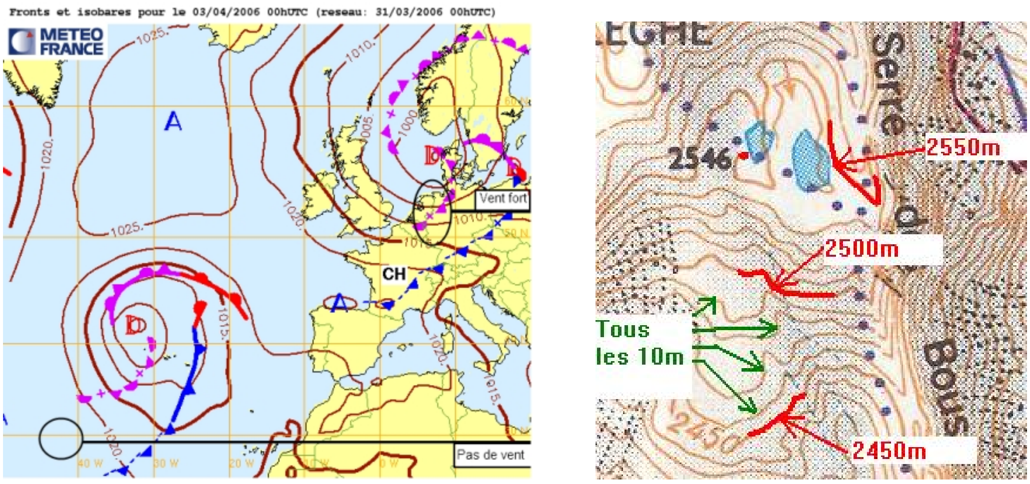


Figure XVIII.5 – Courbes de niveaux : de la pression (à gauche) & de l'altitude (à droite)

Pour comparer les valeurs $f(a,b)$ et $f(a+h,b+k)$, on se déplace du point (a,b) au point $(a+h,b+k)$. Le vecteur (h,k) est le déplacement et la variation de f est $f(a+h,b+k)-f(a,b)$. Pour savoir si f varie beaucoup ou peu, on utilise la valeur absolue $|f(a+h,b+k)-f(a,b)|$. Pour savoir si on se déplace beaucoup ou peu, on utilise **la norme** du vecteur (h,k) :

$$\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}.$$

Dans $\mathbb{R}$, soient deux nombres x et a. Pour dire que le nombre x tend vers le nombre a, on utilise la valeur absolue :

$$x \to a \iff x-a \to 0 \iff |x-a| \to 0.$$

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient deux points (x,y) et (a,b). Pour dire que le point (x,y) tend vers le point (a,b), on utilise la norme :

$$(x,y) \to (a,b) \iff (x-a,y-b) \to (0,0) \iff \|(x-a,y-b)\| \to 0 \iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0.$$

Définition 7
Soient $r>0$ un réel strictement positif, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un point du plan et $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie du plan.

1. On appelle **boule** de centre (a,b) et de rayon r, et on note $\mathcal{B}((a,b),r)$, la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x,y) \in \mathcal{B}((a,b),r) \iff \|(x-a,y-b)\| < r.$$

2. On dit que A est **un ouvert** ou une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ si

$$\forall (a,b) \in A,\ \exists r>0,\ B((a,b),r) \subset A.$$

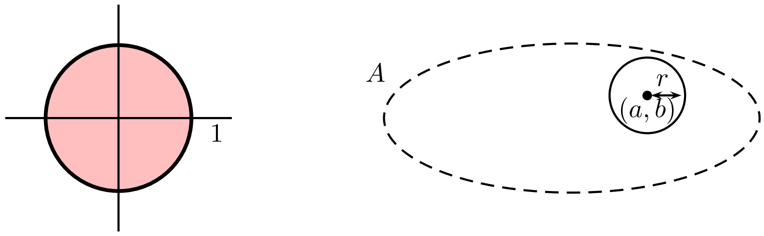


FIGURE XVIII.6 – La boule unité & un ouvert A DE $\mathbb{R}^2$

XVIII.3 CONTINUITÉ

DÉFINITION 8
Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert du plan et $f : D \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur D.

1. Soit $(a, b) \in D$. On dit que f est continue en (a, b) si $f(x, y) \underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow} f(a, b)$, autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0, \forall (x, y) \in D, \quad \|(x - a, y - b)\| < r \implies |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

2. On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.

REMARQUE 9 — *1. f est continue en (a, b) si, et seulement si, $f(a + h, b + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(a, b)$.*

2. Une somme, un produit, un quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues est encore une fonction continue.

EXERCICE 10 — *Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par*

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \qquad , \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

et à l'origine par $f(0, 0) = 0 = g(0, 0)$. Sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

XVIII.4 DÉRIVÉES PARTIELLES

DÉFINITION 11
Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$. Soit un point $(a, b) \in D$.

1. Si
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$
existe et est finie, alors ce nombre réel est noté $\partial_1 f(a, b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et est appelé la **dérivée partielle de f en** (a, b) par rapport à la première variable.
2. Si
$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$
existe et est finie, alors ce nombre réel est noté $\partial_2 f(a, b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ et est appelé la **dérivée partielle de f en** (a, b) par rapport à la deuxième variable.
3. Soit $i \in [\![1, 2]\!]$. Si $\partial_i f(a, b)$ existe pour tout $(a, b) \in D$, alors la fonction $\partial_i f : D \to \mathbb{R}$ est appelée la **dérivée partielle de f** par rapport à la $i-$ème variable.
4. On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si les 2 dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent et sont continues sur D.

Exercice 12 — *Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad si \quad (x,y) \neq (0,0) \quad et \quad f(0,0)=0.$$

Montrer que la fonction f possède des dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Cet exercice montre qu'une fonction de deux variables qui possède des dérivées partielles n'est pas toujours continue. Tandis que, en dimension 1, une fonction dérivable est toujours continue.

XVIII.5 La formule de Taylor & Young

Théorème 13 (**Formule de Taylor & Young**)
Soient D un ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors, pour tout $(a,b) \in D$,

$$\boxed{f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\partial_1 f(a,b) + k\partial_2 f(a,b) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)}$$

où $\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

Preuve —

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= f(a+h,b+k) - f(a,b+k) \\ &+ f(a,b+k) - f(a,b). \end{aligned}$$

On applique le théorème des accroissements finis à chaque différence :

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= h\partial_1 f(a+\theta_1 h, b+k) \\ &+ k\partial_2 f(a, b+\theta_2 k), \end{aligned}$$

où θ_1 et θ_2 appartiennent à $]0,1[$. Or chaque dérivée partielle est continue (car f est de classe $\mathcal{C}^1$), d'où :

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= h\left[\partial_1 f(a,b) + \varepsilon_1(h,k)\right] \\ &+ k\left[\partial_2 f(a,b) + \varepsilon_2(h,k)\right], \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(h,k)$ et $\varepsilon_2(h,k)$ tendent vers zéro quand $(h,k) \to (0,0)$.

D'où $f(a+h) - f(a,b) = h\partial_1 f(a,b) + k\partial_2 f(a,b) + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)$.

Or $|h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)| \leq |h\varepsilon_1(h,k)| + |k\varepsilon_2(h,k)| \leq \sqrt{h^2+k^2} \cdot \underbrace{(|\varepsilon_1(h,k)| + |\varepsilon_2(h,k)|)}_{\longrightarrow 0 \ ((h,k)\to(0,0))}$. □

Corollaire 14
Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Preuve — $f(a+h,b+k) - f(a,b) = h\partial_1 f(a,b) + k\partial_2 f(a,b) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. □

XVIII.6 Le gradient

La formule de Taylor & Young est un développement limité (D.L.) de la fonction f, à l'ordre 1, au voisinage de (a,b) :

— le reste $\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$ de ce D.L. est négligeable devant $\|(h,k)\|$ et est noté $o(h,k)$;

— la partie régulière de ce D.L. est le produit scalaire

$$h\partial_1 f(a,b) + k\partial_2 f(a,b) = (h,k)\cdot(\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b))$$

de deux vecteurs. Le premier vecteur (h,k) est le déplacement, il ne dépend pas de la fonction f. Le second vecteur $\big(\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b)\big)$ ne dépend pas du déplacement mais dépend de la fonction f et du point (a,b) : on le note

$$\nabla f(a,b) = (\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b))$$

ou $\vec{\nabla} f(a,b)$ ou $\mathrm{grad} f(a,b)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a,b)$ et on l'appelle **le gradient** de f en (a,b).

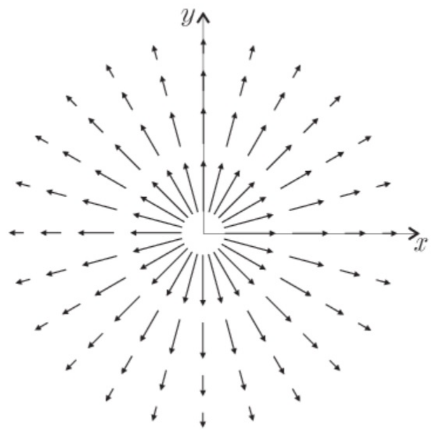


Figure XVIII.7 – Le champ des gradients de $\ln(x^2+y^2)$

Exemple 15 — *La fonction f définie par $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et*

$$\forall (x,y) \neq (0,0), \quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

*La figure XVIII.7 représente en chaque point (x,y) différent de l'origine ce vecteur gradient, qui dépend de (x,y). On obtient ainsi **un champ de vecteurs**.*

On se déplace dans le plan $\mathbb{R}^2$, le long d'une courbe paramétrée par $M : t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ et on évalue, à chaque instant t, la valeur $f(M(t)) = f(x(t), y(t))$ prise par une fonction scalaire f en le point $M(t)$.

Lemme 16 (**règle de la chaîne**)
Soient deux fonctions $f : D \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et $M : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto M(t) = ((x(t), y(t))$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $M(I) \subset D$ et si les fonctions f et M sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors la fonction $f \circ M : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \in I$,

$$(f\circ M)'(t) = x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t)) = M'(t)\cdot \nabla f(M(t))$$

est le produit scalaire du vecteur-vitesse $M'(t) = (x'(t), y'(t))$ et du gradient de f en $M(t)$.

Preuve — Pour tout $t \in I$,

$$x(t+u) = x(t) + ux'(t) + u\varepsilon_1(u) \qquad \text{et} \qquad y(t+u) = y(t) + uy'(t) + u\varepsilon_2(u)$$

car x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

D'après la formule de Taylor & Young, pour tout $(a,b) \in D$,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\partial_1 f(a,b) + k\partial_2 f(a,b) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$$

car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

D'où $f \circ M(t+u) = f \circ M(t) \ + \ u\big[x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t))\big] + u\varepsilon_3(u)$.

Par suite $\dfrac{f \circ M(t+u) - f \circ M(t)}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t))$.

Donc $f \circ M$ est dérivable. Et cette dérivée est continue car les fonctions x', y', $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues.

Enfin, on peut réécrire $(f \circ M)'(t)$ comme un produit scalaire :

$$(f \circ M)'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) \cdot \left(\partial_1 f(x(t), y(t)), \partial_2 f(x(t), y(t))\right).$$

□

On en déduit que : $(f \circ M)'(t) = 0$ si, et seulement si, le vecteur vitesse est orthogonal au gradient.

En particulier, si la fonction f est constante le long de la trajectoire du point $M(t)$, alors le gradient de f est orthogonal au vecteur vitesse en chaque point de la trajectoire. Or le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Donc **le gradient de f est orthogonal à la courbe de niveau de f.**

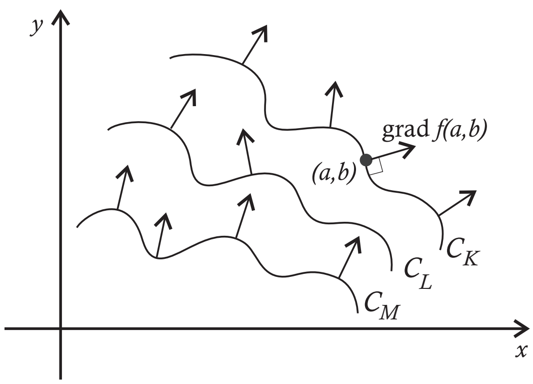


FIGURE XVIII.8 – COURBES DE NIVEAUX $K > L > M$ ET GRADIENT D'UNE FONCTION f

Le gradient de f est orienté dans le sens des f croissants.

EXERCICE 17 — *Déterminer une équation de la droite tangente à l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ au point $(\sqrt{2}, 1)$.*

XVIII.7 CHANGER DE COORDONNÉES

Soient $x : D \to \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto x(u,v)$ et $y : D \to \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto y(u,v)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Soit $M : D \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$.

EXEMPLE 18 (**les coordonnées polaires**) — *La fonction*

$$M : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

change les coordonnées polaires (r, φ) en coordonnées cartésiennes (x, y). Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et leurs dérivées partielles sont :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi) = \cos\varphi & \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi) = -r\sin\varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi) = \sin\varphi & \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi) = +r\cos\varphi \end{array}$$

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction g définie par

$$\forall (u,v) \in D, \quad g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

s'écrit aussi $g = f \circ M$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et ses dérivées partielles sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}.$$

Preuve — On applique la règle de la chaîne (lemme 16) aux deux fonctions

$$u \mapsto g(u,v) = f(M(u,v)) \qquad \text{et} \qquad v \mapsto g(u,v) = f(M(u,v)).$$

□

EXEMPLE 19 (**le gradient en coordonnées polaires**) — *Soit une fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *La fonction* g *définie par*

$$\forall r > 0,\ \forall \varphi \in \mathbb{R}, \quad g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

s'écrit aussi $g = f \circ M$. *D'où*

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) = \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r,\varphi) = -r\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\varphi \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\varphi \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{cases}.$$

On en déduit le gradient en coordonnées polaires :

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\,\vec{e}_\varphi.$$

XVIII.8 Les extrema locaux voire globaux

DÉFINITION 20
Soient une partie $D \subset \mathbb{R}^2$, un point $(a,b) \in D$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$. On dit que la fonction f possède :

1. un minimum global en (a,b) si $\quad \forall (x,y) \in D, \quad f(x,y) \geq f(a,b))$;
2. un minimum local en (a,b) si $\quad \exists \varepsilon > 0,\ \forall (x,y) \in D, \quad \|(x-a, y-b)\| \leq \varepsilon \implies f(x,y) \geq f(a,b)$.

On définit de même un maximum local voire global en (a,b). On dit que f possède un extremum (local voire global) en (a,b) si f possède un maximum ou un minimum (local voire global) en (a,b). Un extremum global est *a fortiori* local.

PROPOSITION 21 (**Une condition nécessaire d'extremum local sur un ouvert**)
Soient un <u>ouvert</u> $D \subset \mathbb{R}^2$, un point $(a,b) \in D$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f possède un extremum local en (a,b), alors $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

Preuve — Soient les fonctions

$$f_1 : t \mapsto f(t,b) \qquad \text{et} \qquad f_2 : t \mapsto f(a,t).$$

L'ensemble D est un ouvert, d'où il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f_1 est définie sur $]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon[\subset \mathbb{R}$. La fonction f_1 est dérivable en a (car f est de classe $\mathcal{C}^1$) et elle possède un extremum local en a, donc sa dérivée est nulle en a : $f_1'(a) = 0$. Or $f_1'(a) = \partial_1 f(a,b)$. De même avec la fonction f_2. □

Si le gradient de la fonction f est nul en un point (a,b), alors on dit que (a,b) est un **point critique** de la fonction f. D'après la proposition 21,

$$f \text{ possède un extremum local en un point } (a,b) \text{ d'un ouvert} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} (a,b) \text{ est un point critique de } f.$$

Exemple 22 — *Soient* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. *La fonction*

$$f\,:\,D \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *sur la boule unité* $B((0,0),1)$, *qui est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *inclus dans* D. *Son gradient en chaque point* $(a,b) \in B((0,0),1)$ *est* $\nabla f(a,b) = (2a, -2b)$. *Son unique point critique est donc* $(0,0)$ *mais il n'y a pas d'extremum local en ce point car* $\forall \varepsilon > 0,\ f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > f(0,0)$ *et* $f(0,\varepsilon) = -\varepsilon < f(0,0)$.

Par contre, il existe :

— *un maximum global, égal à 1, qui est atteint en* $(-1,0)$ *et en* $(+1,0)$ *car*

$f(-1,0) = f(+1,0) = 1$ *et* $\forall (x,y) \in \bar{B}(0,1), f(x,y) \leq 1$ *;*

— *un minimum global, égal à -1, qui est atteint en* $(0,-1)$ *et en* $(0,+1)$ *car*

$f(0,-1) = f(0,+1) = -1$ *et* $\forall (x,y) \in \bar{B}(0,1), f(x,y) \geq -1$.