KDO DU 06/02/2026

Endo. remarquables d'un espace euclidien

Exercice 1. Soient a et b deux endomorphismes, représentés dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ par les matrices

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 & 1 \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement les endomorphismes a et b.

Exercice 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques est noté $\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle$. Soient θ un réel, $\vec{a}$ un vecteur de norme 1 et r la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par $\vec{a}$.

1) Soit $\vec{u}$ un vecteur orthogonal à $\vec{a}$. Montrer que :

$$r(\vec{u}) = \cos(\theta)\,\vec{u} + \sin(\theta)\,\vec{a} \wedge \vec{u}.$$

2) Soit un vecteur $\vec{v}$. Que dire du vecteur $\vec{v} - \langle \vec{v}|\vec{a}\rangle \vec{a}$? En déduire l'expression de $r(\vec{v})$ en fonction de $\vec{v}$, de $\vec{a}$ et de θ.

---

1) Si $\vec{u}$ est nul, c'est exact. Sinon, les vecteurs $\vec{b} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ forment une *bond* de $\mathbb{R}^3$ et $r(\vec{b}) = \cos\theta\vec{b} + \sin\theta\vec{c}$, d'où $r(\vec{u}) = r(\|\vec{u}\|\vec{b}) = \|\vec{u}\| r(\vec{b}) = \cos\theta\vec{u} + \sin\theta\vec{a} \wedge \vec{u}$ car $\|\vec{u}\|\vec{b} = \vec{u}$ et $\|\vec{u}\|\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{u}$.

2) Soit le réel $\lambda = \langle \vec{v}|\vec{a}\rangle$. De l'égalité

$$\langle \vec{v} - \lambda\vec{a}|\vec{a}\rangle = \langle \vec{v}|\vec{a}\rangle - \lambda\langle \vec{a}|\vec{a}\rangle = \langle \vec{v}|\vec{a}\rangle - \langle \vec{v}|\vec{a}\rangle = 0,$$

on déduit que le vecteur $\vec{u} = \vec{v} - \lambda\vec{a}$ est orthogonal au vecteur $\vec{a}$. Or $r(\vec{a}) = \vec{a}$ car ce vecteur appartient à l'axe de rotation. Donc

$$\begin{array}{rcl} r(\vec{v}) & = & r((\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \lambda\vec{a}) \\ & = & r(\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \lambda r(\vec{a}) \\ & = & \cos\theta(\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \sin\theta\vec{a} \wedge (\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \lambda\vec{a} \\ & = & \cos\theta\vec{v} - \cos\theta\langle \vec{v}|\vec{a}\rangle\vec{a} + \sin\theta\vec{a} \wedge \vec{v} + \langle \vec{v}|\vec{a}\rangle\vec{a} \\ & = & \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{a} \wedge \vec{v} + (1 - \cos\theta)\langle \vec{v}|\vec{a}\rangle\vec{a} \end{array}$$