Corrigé du D.S. n° 6 de mathématiques

Exercice (MPI)

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \sqrt{n}x^n$.

$$\text{Soit, pour tout } x \in]-R,+R[,\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^n.$$

2) Pour tout $x \in [0,1[$, comparer $g(x)$ et $\dfrac{x}{1-x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$.

3) Déterminer la nature des séries $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ et $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)x^n$.

$$\text{Soit, pour tout } x \in]-1,+1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)x^n.$$

4) Pour tout $x \in]-1,+1[$, comparer $f(x)$ et $(1-x)g(x)$. En déduire que $g(x)$ possède une limite finie quand x tend vers -1^+.

---

1) Soient $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: alors $|\sqrt{n}x^n| > 0$ et

$$\frac{|\sqrt{n+1}x^{n+1}|}{|\sqrt{n}x^n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|,$$

d'où la série $\sum |\sqrt{n}x^n| \begin{cases} \text{converge si } |x|<1 \\ \text{diverge si } |x|>1 \end{cases}$ d'après le critère de D'Alembert.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{n}x^n$ est égal à 1.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \geq 1$. Donc pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n$$

Or $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$.

3) La suite $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ tend vers 0 en décroissant. En effet :

- d'une part, la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $h'(x) = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \leq 0$ pour tout $x \in]1,+\infty[$. D'où h est décroissante sur $]1,+\infty[$. En particulier $h(n+1) \leq h(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- d'autre part, la limite de $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ est 0 car $\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ est donc convergente. Par contre la série n'est pas absolument convergente car $\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, qui ne change pas de signe, et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge d'après le critère de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

La série $\sum(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n$ converge si $x = -1$ d'où son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1. Elle diverge si $x = +1$ d'où son rayon de convergence est inférieur ou égal à 1. Donc son rayon de convergence est égal à 1.

4) Soit $x \in]-1, 1[$. Toutes le séries à suivre convergent, d'où :

$$\begin{aligned}
(1-x)g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n
\end{aligned}$$

Première méthode — On utilise le **théorème radial d'Abel**. Le rayon de convergence de la série entière $\sum(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n$ est 1 et la série numérique $\sum(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n$ converge. Donc, d'après le théorème radial d'Abel,

$$(1-x)g(x) \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n.$$

Donc $g(x) = \dfrac{1}{1-x} \cdot (1-x)g(x) \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n$.

Seconde méthode — On utilise les **théorèmes des séries alternées et de la double limite**. Soit $x \in]-1, 0]$: on peut appliquer le théorème des séries alternées à la série numérique $\sum(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n$. Cette série converge et son reste $R_n(x)$ vérifie :

$$|R_n(x)| \leq (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})|x|^{n+1} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

qui est un majorant. Or le *sup* est le plus petit majorant, d'où $0 \leq \sup\limits_{x \in]-1,0]} |R_n(x)| \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Or $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sup_{x \in]-1,0]} |R_n(x)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. D'où la suite des fonctions (R_n) converge uniformément sur $]-1, 0]$ vers la fonction nulle. De plus $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n \underset{x \to -1}{\longrightarrow} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n$ qui est une limite finie, donc on peut intervertir somme et limite :

$$\lim_{x \to -1^+} (1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n.$$

Donc $g(x) \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n$.

Exercice (MPI*), tiré de X-ENS Math PSI 2014

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues du segment $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. On note T l'endomorphisme défini sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right).$$

1) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ définies ci-dessous sont-elles équivalentes ?

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

3) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est dérivable en 0. Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

4) On munit E de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Montrer que l'application T est continue et déterminer $|||T|||_\infty$.

5) On munit E de la norme $\|.\|_2$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}.$$

Montrer que : $\forall f \in E,\ \|T(f)\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_2$.

6) On pose, pour chaque $n \geq 2$, la fonction f_n affine par morceaux définie par :

$$f_n(0) = f_n(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(\frac{1}{2}) = 1.$$

En admettant que $\displaystyle\int_0^1 (f_n(x))^2\,dx = \frac{n+1}{3n^2}$ et que $\displaystyle\int_0^1 (T(f_n)(x))^2\,dx = \frac{10n^5+4n^3+10n^2+4}{15n^6}$, déterminer $|||T|||_2$.

---

1) On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall x \in [0,1],\quad f_n(x) = x^n$. Ces fonctions f_n sont bien des éléments de E et $\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f_n(t)]^2\,dt} = \sqrt{\int_0^1 t^{2n}\,dt} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} t^n = 1$. Par l'absurde : supposons qu'il existe une constante α telle que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f\|_2$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f_n\|_2$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. C'est absurde car $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$, donc les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2) Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$. Alors $\forall x \in [0,1],\ xf(x/2) = 0$ et f est donc nulle sur $]0,1/2]$. Par continuité, elle l'est aussi sur $[0,1/2]$. Réciproquement, toute fonction continue sur $[0,1]$ et nulle sur $[0,1/2]$ appartient au noyau de T. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(T) = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1/2],\ f(x) = 0\}$$

3) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Il existe une fonction continue f telle que $\forall x \in [0,1],\ g(x) = xf(x/2)$. Ainsi, $g(0) = 0$ et $\frac{g(x)-g(0)}{x} = f(x/2) \to f(0)$ quand $x \to 0$, ce qui montre que g est dérivable en 0. L'image de T est donc incluse dans l'ensemble des éléments de E s'annulant en 0 et dérivables en 0.
Réciproquement, supposons $g \in E$ nulle en 0 et dérivable en 0. Soit alors f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(0) = g'(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1/2],\ f(x) = \frac{g(2x)}{2x} \quad \text{et} \quad \forall x \in]1/2,1],\ f(x) = g(1).$$

Elle est continue et $\forall x \in]0,1],\ xf(x/2) = g(x)$. Cette égalité reste vraie en 0 par continuité des fonctions dans les deux membres. Ainsi $f \in E$ et $T(f) = g$, ce qui montre que $g \in \mathrm{Im}(T)$. Donc

$$\mathrm{Im}(T) = \{g \in E \mid g(0) = 0 \ \text{ et } g \text{ dérivable en } 0\}$$

4) L'application T est linéaire et elle est continue car $1-$lipschitzienne. En effet, pour tout $f \in E$:

$$\forall x \in [0,1],\ |T(f)(x)| \leq |f(x/2)| \leq \|f\|_\infty$$

qui est un majorant. Or le *sup* est le plus petit majorant, d'où $\|T(f)\|_\infty \leq 1 \times \|f\|_\infty$.

De plus, 1 est le plus petit facteur car la fonction $f : x \mapsto 1$ appartient à E et $T(f) : x \mapsto x$, d'où $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$. Donc $|||T|||_\infty = 1$.

5) Soit $f \in E$. Par le changement de variable $u = x/2$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_0^1 |T(f)(x)|^2\, dx = \int_0^1 x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)^2\, dx = 8\int_0^{1/2} u^2 f^2(u)\, du \leq 2\int_0^{1/2} f^2(u)\, du \leq 2\int_0^1 |f(u)|^2\, du.$$

Donc $\forall f \in E,\ \|T(f)\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_2$.

6) De la question précédente, on déduit que $\forall f \in E,\ \|T(f)\|_2 \leq K\|f\|_2$ si $K = \sqrt{2}$. De $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\|T(f_n)\|_2}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2}$, on déduit que $\sqrt{2}$ est le plus petit de ces réels K. Donc $\|\!|T|\!\|_2 = \sqrt{2}$.

Problème 1, tiré de Centrale-Supélec Math 1 PC 2024

Une première approximation de $\sqrt{2}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n.$$

2) Montrer que la série $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge et déterminer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$.

3) Montrer que $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

La suite de Héron d'Alexandrie.

4) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, si $x > 0$, alors $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{a}$.

5) On pose

$$c_0(a) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right).$$

Montrer que la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

6) Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

7) Calculer $c_1(2)$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2 - 2 \leqslant 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}.$$

8) En déduire que

$$\sqrt{2} = c_n(2) + \underset{n\to\infty}{O}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right).$$

Cette approximation de $\sqrt{2}$ est-elle plus ou moins précise que celle obtenue à la question 3 ?

Racines carrées d'une matrice.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est une racine carrée d'une matrice $A \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ si $B^2 = A$.

9) Montrer que la matrice I_2 possède une infinité de racines carrées.

10) La matrice $-I_2$ possède-t-elle une racine carrée ?

11) Montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

12) Soit $N \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. Montrer que, si N est nilpotente, alors $N^q = 0$ et en déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$.

Racines carrées d'une matrice diagonalisable.

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) P^{-1}$$

et que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ (non nécessairement distinctes deux à deux) sont positives.

13) On pose

$$M_0 = I_q \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + AM_n^{-1}\right).$$

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P\ \mathrm{diag}\big(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)\big) P^{-1}.$$

14) En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une racine carrée de A.

Racines carrées d'une matrice trigonalisable.

On suppose que la matrice $M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est trigonalisable et que ses r valeurs propres $\mu_1, \cdots, \mu_r$ (distinctes deux à deux et de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$) sont strictement positives.

15) Montrer qu'il existe deux matrices A et N telles que :

$$M = A + N,$$
$$A \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(M),$$
$$N \text{ est nilpotente et } AN = NA.$$

(On rappelle que les sous-espaces caractéristiques d'une matrice trigonalisable sont supplémentaires.)

16) Montrer que la matrice A est inversible et que les matrices A^{-1} et N commutent.

17) En déduire une racine carrée de la matrice $I_q + A^{-1}N$.

18) Montrer que la matrice A possède une racine carrée B qui commute avec $A^{-1}N$.

19) En déduire une racine carrée de la matrice M.

---

1) Pour tout $x \in]-1,+1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$. On pose $\alpha = \frac{1}{2}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-2k}{2}\right) &= \frac{(-1)^n}{n!2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^n}\frac{(2n)!}{(2n-1)\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^n}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^n(n!)} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2} = (-1)^{n+1}b_n
\end{aligned}$$

et $b_0 = -1$, d'où $(-1)^{0+1}b_0 = +1$.

2) D'après la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad (2n)! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

Donc

$$b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}(2n)2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

D'où $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ et $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, d'où la série $\sum b_n$ est convergente, donc la série $\sum(-1)^{n+1}b_n$ est absolument convergente. D'où, d'après le théorème d'Abel radial, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$. Or $\sqrt{1+x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sqrt{2}$. Par unicité de la limite, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = \sqrt{2}$.

3) La suite des réels b_n tend vers 0 (d'après l'équivalent trouvé à la question 2) en décroissant car $b_n > 0$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \leq 1$ donc le théorème des séries alternées permet de majorer la valeur absolue du reste :

$$\left|\sqrt{2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k\right| \leq |b_{n+1}| = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

4) Soit $a \geq 0$ et $x > 0$: alors $x^2 + a \geq 2\sqrt{a}x$ car $(x-\sqrt{a})^2 \geq 0$. D'où, en divisant par $2x > 0$: $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{a}$.

5) Par récurrence : initialement, le réel $c_0(a)$ est bien défini et $c_0(a) > 0$ car $c_0(a) = 1$.

Si $c_n(a)$ est bien défini et $c_n(a) > 0$, alors $c_{n+1}(a)$ est bien défini et $c_{n+1}(a) \geq \frac{1}{2}c_n(a) > 0$.

Donc la suite des réels $c_n(a)$ est bien définie.

6) Par récurrence, $c_{n+1}(a) \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question 4. La suite des réels $c_n(a)$ est donc minorée. Elle est aussi décroissante à partir du rang 1 car $c_{n+1}(a) - c_n(a) = \dfrac{1}{2}\left(-c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right) = \dfrac{1}{2c_n(a)}\left(-c_n(a)^2 + a\right) \leq 0$. Elle est donc convergente et sa limite ℓ est une solution de l'équation $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$, d'où $\ell^2 - a$, donc $\ell \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$. De plus $\ell \geq \sqrt{a}$ car l'inégalité large $c_n(a) \geq \sqrt{a}$ passe à la limite. Donc $\ell = \sqrt{a}$.

7) $c_1(2) = \frac{3}{2}$ donc $c_1(2)^2 - 2 = \frac{1}{4} = 8\left(\frac{1}{32}\right)^1$.

Supposons $c_n(2)^2 - 2 \leq 8\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$. Alors

$$c_{n+1}(2)^2 - 2 = \frac{1}{4c_n(2)^2}\left(c_n(2)^2 - 2\right)^2 \leq \frac{1}{4c_n(2)^2}\left[8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right]^2 \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^n}$$

car $c_n(2)^2 \geq 2$ d'après la question 4.

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n(2)^2 - 2 \leq 8\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$.

8) $\left|\sqrt{2} - c_n(2)\right| = \frac{c_n(2)^2-2}{c_n(2)+\sqrt{2}} \leq \frac{8}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$ est donc un $\underset{n\to\infty}{O}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$.

Par croissances comparées, $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, donc la dernière approximation est meilleure que celle obtenue à la question 3.

9) Pour tout réel θ, la matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ est une racine carrée de la matrice I_2.

10) La matrice $\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}$ est une racine carrée de $-I_2$.

11) En reprenant les notations de la question 1, le développement limité en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre $q-1$ est :

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{q-1}(-1)^{n+1}b_n x^n + o(x^{q-1}) = R_q(x) + o(x^{q-1})$$

en posant le polynôme $R_q(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{q-1}(-1)^{n+1}b_n X^n$.

D'où $1 + x = \sqrt{1+x}^2 = R_q(x)^2 + o(x^{q-1})$, donc $1 + x - R_q(x)^2 = o(x^{q-1})$. Par conséquent, le monôme de plus petit degré dans le polynôme $1 + X - R_q(X)^2$ est nul ou de degré supérieur à q, donc X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

12) Soit une matrice N nilpotente. Il existe alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$. Par suite il existe $X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$ tel que $N^{p-1}X \neq 0$. On montre alors que la famille $(X, NX, \cdots, N^{p-1}X)$ de p vecteurs colonnes est libre. D'où $p \leq q$ car la dimension de $\mathscr{M}_{q1}(\mathbb{K})$ vaut q. Or $N^p = 0$. D'où $N^q = N^p \cdot N^{q-p} = 0 \cdot N^{q-p} = 0$.

En reprenant le polynôme R_q de la question précédente, il existe un polynôme $Q(X)$ tel que :

$$I_q + N - R_q(N)^2 = N^q Q(N) = 0 \quad \text{donc} \quad R_q(N)^2 = I_q + N$$

Donc $R_q(N)$ est une racine carrée de $I_q + N$.

13) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n est bien définie et $M_n = P\ \mathrm{diag}\big(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)\big) P^{-1}$.

Initialement, $M_0 = I_q$ est bien définie et $\forall i,\ c_0(\lambda_i) = 1$.

Supposons que la matrice M_n est bien définie et que $M_n = P\mathrm{diag}\left(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)\right) P^{-1}$.

D'après la question 5, $c_n(\lambda_i) > 0$ pour chaque $i \in [\![1, q]\!]$, d'où $\det(M_n) = \prod_{i=1}^{q} c_n(\lambda_i) > 0$, par conséquent M_n est inversible et la matrice $M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + AM_n^{-1}\right)$ est bien définie.

De plus, $M_n^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^{-1}$ d'où :

$$\begin{aligned} AM_n^{-1} &= P\mathrm{diag}\left(\lambda_1, \cdots, \lambda_q\right) \underbrace{P^{-1}P}_{=I_q} \mathrm{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right) P^{-1} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + AM_n^{-1}\right) &= \frac{1}{2}P\left[\mathrm{diag}\left(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)\right) + \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right)\right] P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}\left(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}\right), \cdots, \frac{1}{2}\left(c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_q)}\right)\right) P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}\left(c_{n+1}(\lambda_1), \cdots, c_{n+1}(\lambda_q)\right) P^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

14) Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ d'après la question 6. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, la suite des matrice suivante converge car chacune de ses coordonnées converge :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diag}\left(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)\right) = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_q}\right)$$

Enfin l'application $\varphi\ :\ M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur l'*ev* $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie d'où φ est continue donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(P\,\mathrm{diag}\left(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)\right) P^{-1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\mathrm{diag}\left(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)\right)\right) \\ &= \varphi\left[\lim_{n\to\infty} \mathrm{diag}\left(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)\right)\right] \\ &= P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_q}\right) P^{-1} \end{aligned}$$

Donc la suite des matrices M_n tend vers une racine carrée $B = P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_q}\right) P^{-1}$ de la matrice A.

15) Parce que les r sous-espaces caractéristiques de la matrice M sont supplémentaires, la matrice M est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(B_1, \cdots, B_r)$ ▷ **exercice 39 du chapitre IV**, autrement dit $\exists Q \in GL_q(\mathbb{R})$, $M = Q\mathrm{diag}(B_1, \cdots, B_r)Q^{-1}$. Et dans les r blocs $B_k = \mu_k I_{m_k} + N_k$, les réels μ_k sont les valeurs propres de M distinctes deux à deux, de multiplicité m_k et les blocs N_k sont nilpotents. Les matrices diagonale $\mathrm{diag}(\mu_1 I_{m_1}, \cdots, \mu_r I_{m_r})$ et nilpotente $\mathrm{diag}(N_1, \cdots, N_r)$ commutent car chaque bloc N_k commute avec $\mu_k I_{m_k}$.

Posons $A = Q\mathrm{diag}(\mu_1 I_{m_1}, \cdots, \mu_r I_{m_r})Q^{-1}$ et $N = Q\mathrm{diag}(N_1, \cdots, N_r)Q^{-1}$. Alors $M = A + N$, A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(M)$, N est nilpotente et $AN = NA$.

16) Par hypothèse, les valeurs propres de M, et donc de A, sont strictement positives. La matrice A est donc inversible car 0 n'est pas une valeur propre.

$N = A^{-1}AN = A^{-1}NA$ car $AN = NA$. En multipliant à droite par A^{-1}, il vient : $NA^{-1} = A^{-1}N$.

17) La matrice $A^{-1}N$ est nilpotente car A^{-1} et N commutent. D'après la question 12, la matrice $R_q(A^{-1}N)$ est une racine carrée de la matrice $I_q + A^{-1}N$.

18) Avec les notations de la question 15, posons $B = Q\mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1} I_{m_1}, \cdots, \sqrt{\mu_r} I_{m_r})Q^{-1}$. Cette matrice :

- est bien définie car les valeurs propres μ_i de A sont positives (en effet $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A)$ et les valeurs propres de M sont strictement positives par hypothèse) ;
- est une racine carrée de la matrice A ;
- commute avec $A = Q\mathrm{diag}(\mu_1 I_{m_1}, \cdots, \mu_r I_{m_r})Q^{-1}$ et $N = Q\mathrm{diag}(N_1, \cdots, N_r)Q^{-1}$, donc aussi avec $A^{-1}N$.

19) La matrice $BR_q(A^{-1}N)$ est une racine carrée de la matrice $M = A(I_q + A^{-1}N)$ car $(BR_q(A^{-1}N))^2 = B^2(R_q(A^{-1}N))^2$ car les matrices B et $A^{-1}N$ commutent. Or $B^2 = A$ et $(R_q(A^{-1}N))^2 = I_q + A^{-1}N$.

PROBLÈME 2, TIRÉ DE CCP MATH PC 2015

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire S_n qui suit une loi de Poisson de paramètre n : $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbf{P}(X = k) = e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau des variations de la fonction f_n.

b) Déterminer un équivalent de $f_n(n)$ quand n tend vers ∞.

2) **a)** Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance de la variable aléatoire S_n et déterminer celles de la variable aléatoire $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ et en déduire que : $\mathbf{E}\left(|S_n - n|\right) = 2e^{-n}\dfrac{n^{n+1}}{n!}$.

c) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(|S_n^*|\right)$.

3) **a)** Rappeler l'hypothèse et l'expression du reste $R_n(a,b)$ de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + R_n(a,b)$$

pour une fonction f sur un intervalle $[a,b]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

c) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n.

a) Montrer que la fonction $\mathbf{G}_{S_n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

c) Étudier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*})$.

---

1) **a)** Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geq 0$, $f_n'(t) = \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{n!}(n-t)$.

t	0		n		$+\infty$
$f_n'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f_n(t)$	0	$\nearrow$	$f_n(n) = \dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$	$\searrow$	0

b) Grâce à la formule de Stirling, $f_n(n) \sim \dfrac{e^{-n}n^n}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}$ et, en simplifiant, $f_n(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

2) **a)** $E(S_n) = V(S_n) = n$. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n^*) = \frac{E(S_n)-n}{\sqrt{n}} = 0$. Et $V(S_n^*) = \frac{V(S_n)}{\sqrt{n}^2} = 1$.

b) On calcule la somme $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ grâce à un télescope :

$$K = ne^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\right) = ne^{-n}\frac{n^n}{n!}.$$

$$\mathbf{E}(|S_n - n|) = \sum_{k=0}^{\infty}|k-n|e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)e^{-n}\frac{n^k}{k!} = K + L,$$

Or $L - K = E(S_n - n) = 0$, d'où $K = L$, donc

$$E(|S_n - n|) = 2K = 2e^{-n}\frac{n^{n+1}}{n!}.$$

c) $E(|S_n^*|) = \frac{1}{\sqrt{n}}E(|S_n - n|) = 2\sqrt{n}f_n(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ d'après la question 1b. Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|S_n^*|) = \sqrt{2/\pi}$.

3) **a)** Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,b]$, alors la formule de Taylor est vérifiée avec $R_n(a,b) = \displaystyle\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $(S_n^* \leq 0) = (S_n \leq n) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}(S_n = k)$ et cette union est disjointe, d'où $P(S_n^* \leq 0) = P(S_n \leq n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(S_n = k)$, donc : $P(S_n^* \leq 0) = e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f = \exp$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b] = [0,n]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f$ et $f(0) = 1$ donc $e^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + R_n(0,n)$, où $R_n(0,n) = \displaystyle\int_0^n e^t\frac{(n-t)^n}{n!}dt = \int_0^n \frac{e^{n-u}u^n}{n!}du$ (par le changement de variable $u = n - t$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$).

On multiplie l'égalité obtenue par e^{-n} : $1 = e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!}dt$. D'où

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

c) Par suite :

$$\begin{aligned}
P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) &= \int_0^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt \\
&= \int_0^n e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on pose $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $u'(t) = \dfrac{t^n}{n!}$, $v'(t) = e^{-t}$. D'où, en intégrant par parties :

$$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)dt - f_{n+1}(n)$ et la fonction f_{n+1} est croissante sur $[n; n+1]$ d'après la question 1a. Donc, pour tout $t \in [n; n+1]$, $f_{n+1}(t) \geq f_{n+1}(n)$ et, en intégrant sur $[n; n+1]$: $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) \geq 0$. La suite $(P(S_n^* \leq 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Par ailleurs, elle est minorée par 0 (car toute probabilité est positive), donc elle converge.

4) **a)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$: la série $\sum \dfrac{(nt)^k}{k!}$ converge et sa somme vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nt)^k}{k!} = e^{nt}$. D'où $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}e^{-n}\frac{(nt)^k}{k!}$ est défini et vaut

$$G_{S_n}(t) = e^{n(t-1)}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{G}_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(S_n = k)t^k = \mathbf{E}(t^{S_n})$ d'après le théorème de transfert.

Or $t^{S_n^*} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n - n} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n} \times t^{-\sqrt{n}}$. D'où, par linéarité de l'espérance, $t^{S_n^*}$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

c) D'après les deux questions précédentes, $\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \dfrac{\exp\Big(n(t^{1/\sqrt{n}} - 1)\Big)}{t^{\sqrt{n}}}$.

$e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)$, où $\varepsilon(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0. D'où $t^{1/\sqrt{n}} = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ln t\right) = 1+\dfrac{\ln t}{\sqrt{n}}+\dfrac{(\ln t)^2}{2n}+\dfrac{1}{n}\varepsilon_n$, où ε_n tend vers 0 quand n tend vers ∞. D'où $n(t^{1/\sqrt{n}}-1) = \sqrt{n}\ln t+\dfrac{(\ln t)^2}{2}+\varepsilon_n$. Donc $\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \exp\left[\dfrac{(\ln t)^2}{2} + \varepsilon_n\right]$.

Par continuité de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \exp\left(\dfrac{(\ln t)^2}{2}\right)$.