D.S. n° 6 de mathématiques

Cet énoncé comporte un exercice et deux problèmes.

Exercice

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues du segment $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. On note T l'endomorphisme défini sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right).$$

1) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ définies ci-dessous sont-elles équivalentes ?

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

3) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est dérivable en 0. Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

4) On munit E de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Montrer que l'application T est continue et déterminer $|\!|\!| T |\!|\!|_\infty$.

5) On munit E de la norme $\|.\|_2$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\, dx}.$$

Montrer que : $\forall f \in E,\ \|T(f)\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_2$.

6) On pose, pour chaque $n \geq 2$, la fonction f_n affine par morceaux définie par :

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right) = f_n(1) = 0 \quad \text{et} \quad f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

En admettant que $\displaystyle\int_0^1 (f_n(x))^2\, dx = \frac{n+1}{3n^2}$ et que $\displaystyle\int_0^1 (T(f_n)(x))^2\, dx = \frac{10n^5 + 4n^3 + 10n^2 + 4}{15n^6}$, déterminer $|\!|\!| T |\!|\!|_2$.

Problème 1

Une première approximation de $\sqrt{2}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n.$$

2) Montrer que la série $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge et déterminer sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$.

3) Montrer que $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k + \underset{n \to \infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

La suite de Héron d'Alexandrie.

4) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, si $x > 0$, alors $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{a}$.

5) On pose

$$c_0(a) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right).$$

Montrer que la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

6) Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

7) Calculer $c_1(2)$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2 - 2 \leqslant 8 \left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}.$$

8) En déduire que

$$\sqrt{2} = c_n(2) + \underset{n \to \infty}{O}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right).$$

Cette approximation de $\sqrt{2}$ est-elle plus ou moins précise que celle obtenue à la question 3 ?

Racines carrées d'une matrice.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est une racine carrée d'une matrice $A \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ si $B^2 = A$.

9) Montrer que la matrice I_2 possède une infinité de racines carrées.

10) La matrice $-I_2$ possède-t-elle une racine carrée ?

11) Montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

12) Soit $N \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. Montrer que, si N est nilpotente, alors $N^q = 0$ et en déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$.

Racines carrées d'une matrice diagonalisable.

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) P^{-1}$$

et que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ (non nécessairement distinctes deux à deux) sont positives.

13) On pose

$$M_0 = I_q \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + AM_n^{-1}\right).$$

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P \ \mathrm{diag}\big(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)\big) P^{-1}.$$

14) En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une racine carrée de A.

Racines carrées d'une matrice trigonalisable.

On suppose que la matrice $M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est trigonalisable et que ses r valeurs propres $\mu_1, \cdots, \mu_r$ (distinctes deux à deux et de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$) sont strictement positives.

15) Montrer qu'il existe deux matrices A et N telles que :

$$M = A + N,$$
$$A \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(M),$$
$$N \text{ est nilpotente et } AN = NA.$$

(On rappelle que les sous-espaces caractéristiques d'une matrice trigonalisable sont supplémentaires.)

16) Montrer que la matrice A est inversible et que les matrices A^{-1} et N commutent.

17) En déduire une racine carrée de la matrice $I_q + A^{-1}N$.

18) Montrer que la matrice A possède une racine carrée B qui commute avec $A^{-1}N$.

19) En déduire une racine carrée de la matrice M.

Problème 2

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire S_n qui suit une loi de Poisson de paramètre n : $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbf{P}(X = k) = e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau des variations de la fonction f_n.

b) Déterminer un équivalent de $f_n(n)$ quand n tend vers ∞.

2) **a)** Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance de la variable aléatoire S_n et déterminer celles de la variable aléatoire $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ et en déduire que : $\mathbf{E}\left(|S_n - n|\right) = 2e^{-n}\dfrac{n^{n+1}}{n!}$.

c) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(|S_n^*|\right)$.

3) **a)** Rappeler l'hypothèse et l'expression du reste $R_n(a,b)$ de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + R_n(a,b)$$

pour une fonction f sur un intervalle $[a,b]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

c) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt - e^{-n}\,\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n.

a) Montrer que la fonction $\mathbf{G}_{S_n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

c) Étudier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*})$.