Corrigé de la colle n° 16

E . v . n .

6 février 2026

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?
2. On note $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

---

1. Soit L la limite de la suite convergente $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   D'une part, la suite $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$, elle converge donc aussi vers L, autrement dit :
   $$A^{2k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} L.$$
   D'autre part, la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto M^2$ est continue (car ♡), d'où $f(A^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(L)$, autrement dit :
   $$A^{2k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} L^2.$$
   Par unicité de la limite, $L = L^2$, donc L est un projecteur.

   ♡ Cette fonction f est continue car c'est la composée $g\circ h$ des fonctions continues $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ (M_1, M_2) \mapsto M_1M_2$ et $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto (M, M)$. La fonction g est continue car elle est bilinéaire sur un *ev* de dimension finie. La fonction h est continue car elle est linéaire sur un *ev* de dimension finie.
2. $SL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{1\}$, qui est une partie fermée de $\mathbb{R}$, par l'application $\det : M \mapsto \det M$, qui est cintinue car ♡♡. À ce titre, c'est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$. La matrice tM tend vers la matrice M quand le réel t tend vers 1. Or $\det(tM) = t^n$, ce qui montre que toute boule ouverte centrée en M contient des matrices qui ne sont pas dans $SL_n(\mathbb{R})$. Par suite $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert.

   Autre rédac : $I_n \in SL_n(\mathbb{R})$ mais, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice $I_n + \frac{1}{k}I_n$ n'appartient pas à $SL_n(\mathbb{R})$. Or $\frac{1}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où aucune boule centrée en I_n n'est incluse dans $SL_n(\mathbb{R})$, donc $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert.

   ♡♡ La fonction det est continue car c'est la composée $g \circ h$ des fonctions continues $g : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})^n \to \mathbb{R},\ (C_1, \cdots, C_n) \mapsto \det(C_1, \cdots, C_n)$ et $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})^n,\ M \mapsto (C_1, \cdots, C_n)$. La fonction g est continue car elle est multilinéaire (car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes) sur un *ev* de dimension finie. La fonction h est continue car elle est linéaire sur un *ev* de dimension finie.

Exercice 2 (Mines Ponts PSI 2014)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Soient $e \in E$ et $T_e : f \in E \mapsto \int_0^1 e(t)f(t)\,dt \in \mathbb{R}$. Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $|||T_e|||_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\|\ \|_\infty$.

Ind. Considérer $f_\varepsilon : t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

L'application T_e est linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\forall f \in E,\ |T_e(f)| \leqslant \int_0^1 |e(t)|.\|f\|_\infty\,dt = K \cdot \|f\|_\infty$, avec $K = \|e\|_1$. Donc l'application T_e est continue et $|||T_e|||_\infty \leqslant \|e\|_1$ car $|||T_e|||_\infty$ est le plus petit K possible.

Soit $\varepsilon > 0$: $|T_e(f_\varepsilon)| = \int_0^1 \frac{e^2(t)}{|e(t)|+\varepsilon}\,dt = \int_0^1 \left(|e(t)| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{|e(t)|+\varepsilon}\right) dt \geqslant \int_0^1 (|e(t)| - \varepsilon)\,dt = \|e\|_1 - \varepsilon$ et $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$, d'où $|||T_e|||_\infty \geq \|e\|_1 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $|||T_e|||_\infty \geq \|e\|_1$, donc $|||T_e|||_\infty = \|e\|_1$.

Exercice 3 (CCP PSI 2015)**.** Soit E l'espace des suites bornées à valeurs complexes. Montrer que $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

Soit $u \in E$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$. Alors $\frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et $\frac{|u_n|}{n!} \leqslant \frac{M}{n!}$, ce qui prouve la convergence des deux séries définissant $N(u)$ et $N'(u)$: les fonctions N et N' sont bien définies. Vérifions les axiomes des normes.

— Une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, on a : $N(u) = 0 \iff u = 0$ et $N'(u) = 0 \iff u = 0$.
— On vérifie que $N(\lambda u)|\lambda|N((u)$ et de même pour N'.
— Soient u et v dans E. L'inégalité triangulaire $N(u+v) \leqslant N(u) + N(v)$ résulte de la sommation des inégalités triangulaires $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, préalablement divisées par 2^n, et il en est de même pour N'.

On conclut que N et N' sont deux normes sur E. Il est vrai que $N' \leqslant N$; pour autant, ces deux normes ne sont pas équivalentes. Par l'absurde : si elles sont équivalentes, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall u \in E,\ N(u) \leqslant \alpha N'(u)$. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on considère la suite $e_p = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{N(e_p)}{N'(e_p)} = \frac{1/2^p}{1/p!} = \frac{p!}{2^p} \leqslant \alpha.$$

Or la suite de terme général $\frac{p!}{2^p}$ n'est pas bornée car elle tend vers $+\infty$.