COLLE N$^{\text{O}}$ 17

E.v.n.

Exercice 1.

▷ **Une définition** — On dit qu'une partie A d'un *ev* E est **convexe** si $\forall (a,b) \in A^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda a + (1-\lambda)b$.

Soit E un espace vectoriel. Soient x et y deux vecteurs distincts.

1. Représenter sur un dessin les deux ensembles

$$F = \{\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad G = \{\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in [0,1]\}.$$

   Les ensembles F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
2. On munit E d'une norme $\|\cdot\|$. Soit B l'ensemble des vecteurs de norme strictement inférieure à 1, *i.e.* la boule ouverte de centre 0_E et de rayon 1. Montrer que B est convexe.
3. On suppose que la norme $\|\cdot\|$ est euclidienne. Soit S l'ensemble des vecteurs de norme égale à 1. Montrer que : si x et y appartiennent à S, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}, \quad (1-\lambda)x + \lambda y \notin S.$$

   Interpréter cette propriété sur un dessin.
4. On ne suppose plus que la norme est euclidienne. La deuxième propriété est-elle encore vraie ?

Exercice 2 (*Un hyperplan est, ou bien fermé, ou bien dense*)**.**

Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\bar{F}$ son adhérence.

1. Montrer que $\bar{F}$ est un *sev* de E.
2. Soit un vecteur $u \in E$. On suppose que $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus F$ et $F \neq \bar{F}$.
   (a) Montrer que : il existe un vecteur $v \in \bar{F}$ tel que $E = \mathrm{Vect}(v) \oplus F$.
   (b) En déduire que F est dense dans E.
3. On munit l'*ev* $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie pour tout polynôme P par $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.
   (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)$ est continue mais que l'application $g : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(2)$ ne l'est pas.
   (b) Que dire de l'hyperplan $F = \mathrm{Ker}(f)$? Et de l'hyperplan $G = \mathrm{Ker}(g)$?

▷ **Rappel sur les hyperplans (proposition 12 du chapitre II)** — On rappelle que, dans un $\mathbb{K}-ev$ E (de dimension finie ou infinie), si un vecteur u n'appartient pas à un hyperplan H, alors l'hyperplan H et la droite $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires : $H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$.