Corrigé de la colle n° 17

E.v.n.

8 février 2026

Exercice 1.

▷ **Une définition** — On dit qu'une partie A d'un *ev* E est **convexe** si $\forall (a,b) \in A^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda a + (1-\lambda) b$.

Soit E un espace vectoriel. Soient x et y deux vecteurs distincts.

1. Représenter sur un dessin les deux ensembles

$$F = \{\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad G = \{\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in [0,1]\}.$$

Les ensembles F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

2. On munit E d'une norme $\|\cdot\|$. Soit B l'ensemble des vecteurs de norme strictement inférieure à 1, *i.e.* la boule ouverte de centre 0_E et de rayon 1. Montrer que B est convexe.

3. On suppose que la norme $\|\cdot\|$ est euclidienne. Soit S l'ensemble des vecteurs de norme égale à 1. Montrer que : si x et y appartiennent à S, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}, \quad (1-\lambda)x + \lambda y \notin S.$$

Interpréter cette propriété sur un dessin.

4. On ne suppose plus que la norme est euclidienne. La deuxième propriété est-elle encore vraie ?

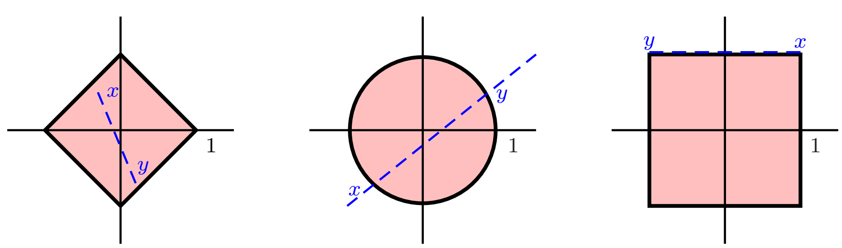
---

1. Le vecteur $x-y$ n'est pas nul et $\lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y)$. D'où F est la droite passant par y et dirigée par $x-y$. Cette droite est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, elle passe par l'origine 0_E. Donc l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les vecteurs x et y sont liés.

   L'ensemble G est le segment $[x,y]$. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E car (par l'absurde) : si G est un *sev*, alors $x-y \in G$ car $x \in G$ et $y \in G$. D'où $y + 2(x-y) \in G$. C'est absurde car $y + 2(x-y) = \lambda x + (1-\lambda)y \iff \lambda = 2$.

2. Soient x et y deux vecteurs de B : $\|x\| < 1$ et $\|y\| < 1$. Pour tout réel $\lambda \in [0,1]$, $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| = |\lambda| \cdot \|x\| + |1-\lambda| \cdot \|y\| < |\lambda| + |1-\lambda| = \lambda + 1 - \lambda = 1$. D'où $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$. Donc le vecteur $\lambda x + (1-\lambda)y$ appartient à B.

   On vient donc de montrer que : la boule ouverte (de rayon 1 et de centre 0_E) est convexe. Cette propriété dit que : si x et y appartiennent à B, alors tout le segment $[x,y]$ est inclus dans B. (Voir la figure à gauche.)



3. Soit $P(\lambda) = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|^2 - 1$. La norme $\|\cdot\|$ est euclidienne, d'où la fonction P est un polynôme : $P(\lambda) =< (1-\lambda)x + \lambda y | (1-\lambda)x + \lambda y > -1 = \|y-x\|^2 \cdot \lambda^2 + 2 < x | y - x > \cdot \lambda + \|x\|^2 - 1$.

Si x et y appartiennent à S, alors 0 et 1 sont deux racines du polynôme P. Or le polynôme P est de degré 2 car $x \neq y$. D'où : le nombre de ses racines est inférieur ou égal à 2. D'où $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $P(\lambda) \neq 0$. Donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad (1-\lambda)x + \lambda y \notin S.$$

On vient de montrer que : si x et y appartiennent à S, alors les autres points de la droite (x, y) n'appartiennent pas à S. (Voir la figure au centre.)

4. Non. Voici un contre-exemple. On choisit :
   - la norme « infini » : $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$;
   - les deux vecteurs $x = (1,1)$ et $y = (-1,1)$.

   Tout le segment $[x, y]$ est inclus dans S. (Voir la figure à droite.)

Exercice 2 (*Un hyperplan est, ou bien fermé, ou bien dense*)**.**

Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\bar{F}$ son adhérence.

1. Montrer que $\bar{F}$ est un *sev* de E.
2. Soit un vecteur $u \in E$. On suppose que $E = \text{Vect}(u) \oplus F$ et $F \neq \bar{F}$.
   (a) Montrer que : il existe un vecteur $v \in \bar{F}$ tel que $E = \text{Vect}(v) \oplus F$.
   (b) En déduire que F est dense dans E.
3. On munit l'*ev* $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie pour tout polynôme P par $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.
   (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)$ est continue mais que l'application $g : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(2)$ ne l'est pas.
   (b) Que dire de l'hyperplan $F = \text{Ker}(f)$? Et de l'hyperplan $G = \text{Ker}(g)$?

▷ **Rappel sur les hyperplans (proposition 12 du chapitre II)** — On rappelle que, dans un $\mathbb{K} - ev$ E (de dimension finie ou infinie), si un vecteur u n'appartient pas à un hyperplan H, alors l'hyperplan H et la droite $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires : $H \oplus \text{Vect}(u) = E$.

---

1. Première méthode (avec des boules) : Soient $\varepsilon > 0$, $x \in \bar{F}$ et $y \in \bar{F}$. Alors $\exists a \in F$, $\exists b \in F$, $\quad \|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|y - b\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'où $\|(x+y) - (a+b)\| \leq \|x-a\| + \|y-b\| \leq \varepsilon$. Donc $x + y \in \bar{F}$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $\exists a \in F$, $\quad \|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.

   D'où $\|\lambda x - \lambda a\| \leq \varepsilon$. Donc $\lambda x \in \bar{F}$.

   Seconde méthode (avec des suites) : Soient deux vecteurs u et v de $\bar{F}$: il existe des suites respectives (u_n) et (v_n) de vecteurs de F convergeant vers u et v respectivement. Soient deux réels λ et μ. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $\lambda u_n + \mu v_n$ appartient à F car F est un *sev*. De plus, $\lambda u_n + \mu v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda u + \mu v$ d'après le théorème des gendarmes car, d'après l'inégalité triangulaire, $0 \leq \|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda u + \mu v)\| \leq |\lambda|\|u_n - u\| + |\mu|\|v_n - v\|$, qui tend vers $|\lambda| \cdot 0 + |\mu| \cdot 0 = 0$.

   En conclusion de l'une ou l'autre de ces méthodes, $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de F car :

   * $0_E \in F$ et $F \subset \bar{F}$, d'où $0_E \in \bar{F}$;

   ** $\bar{F}$ est stable par superpositions d'après la question précédente.
2. (a) $\bar{F} \neq F$ et $F \subset \bar{F}$, d'où $\exists v \in \bar{F} \setminus F$. Or $E = \text{Vect}(u) \oplus F$, d'où $v = \alpha u + v_F$, où $\alpha \neq 0$ et $v_F \in F$.

   Soit $x \in E$: $x = \beta u + x_F = \frac{\beta}{\alpha} v + x_F - \frac{1}{\alpha} v_F$, d'où $E = \text{Vect}(v) + F$. La somme est directe car $\text{Vect}(v) \cap F = \{0_E\}$ car $x \in \text{Vect}(v) \cap F \implies \exists \gamma \in \mathbb{R},\ x = \gamma v$ et $x \in F \implies \gamma = 0$ car $v \notin F$.

   (b) On a montré que $\bar{F}$ est un *sev* de E, d'où $v \in \bar{F} \implies \text{Vect}(v) \subset \bar{F}$. De plus $F \subset \bar{F}$, d'où $\text{Vect}(v) \oplus F \subset \bar{F}$ car $\bar{F}$ est un *sev* de E.

   Or $E = \text{Vect}(v) \oplus F$, d'où $E \subset \bar{F}$, d'où $\bar{F} = E$, donc F est dense dans E.
3. (a) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $|f(P) = |P(0)| \leq \|P\|$, donc l'application linéaire f est continue.

   Soit la suite des polynômes $P_n = \frac{X^n}{2^n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(P_n) = 1$, d'où la suite des réels $g(P_n)$ ne tend pas vers $0_\mathbb{R}$. Or la suite des polynômes P_n tend vers $0_{\mathbb{R}[X]}$ car $\|P_n - 0_{\mathbb{R}[X]}\| = \frac{1}{2^n}$ ne tend pas vers $0_\mathbb{R}$. D'où $g(P_n)$ ne tend pas vers $g(0_{\mathbb{R}[X]})$ quand P_n tend vers $0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc l'application g n'est pas continue en $0_{\mathbb{R}[X]}$.

   (b) L'hyperplan F est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f. Mais l'hyperplan G est dense car il n'est pas fermé. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n - 1$ appartient à G car $g(P_n - 1) = 0$. Et la suite des polynômes $P_n - 1$ tend vers le polynôme -1 car $\|(P_n - 1) - (-1)\| = \frac{1}{2^n}$ tend vers $0_\mathbb{R}$. Or le polynôme -1 n'appartient pas à G, ce qui contredit la caractérisation séquentielle d'un fermé.