Intégrales à paramètre

Exercice 1 ★★

On pose pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1]$, $g(x,t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$.

1) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$. De plus, $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{x\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Comme $1-x<1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, et donc par comparaison de fonctions positives, $f(x)$ existe.

2)
- Pour tout $x>0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$;
- pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $a<b$ deux réels strictement positifs. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times]0,1]$,

$$|\ g(x,t)| \leq \frac{t^{a-1}}{1+t} \leq t^{a-1}.$$

  Comme $t \mapsto t^{a-1}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$, la fonction f est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_*^+$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

3) Soit $x>0$.

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t} dt = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}.$$

4) Par continuité, $\lim\limits_{x\to 0} f(x+1) = f(1)$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 ★★★

On pose pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et $f(x,t) = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$ quand t tend vers $+\infty$, donc $F(x)$ existe.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ et pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} f(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}} t^n e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $x \geq 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n} f(x,t)$ sont continues par morceaux.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2, |\frac{\partial^n f}{\partial x^n} f(x,t)| \leq n! t^n e^{-t}.$$

Comme $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on peut affirmer que F est de classe C^∞ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}} dt.$$

1) De la formule précédente, on déduit $F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$.

Exercice 3 ★★★

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^3+t^3}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{1+x^3+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ donc cette fonction est intégrable. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2) Comme $u \mapsto \frac{1}{u}$ est un C^1-difféomorphisme entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, on peut réaliser le changement de variables $t = \frac{1}{u}$ et on obtient $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{udu}{1+u^3}$ et donc $f(0) + f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Par suite $f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

3) Pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto \frac{1}{1+x^3+t^3}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{1}{1+t^3+x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $|\frac{1}{1+x^3+t^3}| \leq \frac{1}{1+t^3}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $x < y$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+x^3+t^3} \geq \frac{1}{1+y^3+t^3}$, donc par croissance de l'intégrale, $f(y) \geq f(x)$. Donc f est décroissante.

4) Pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^3+t^3} = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$$

la dernière égalité venant du changement de variables affine $t = xu$. On en déduit par le théorème d'encadrements que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 4 ★★★

1) Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto \sin^{x(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin^{x(t)} \underset{t\to 0}{\sim} t^x$. Comme $x > -1$, $t \mapsto t^x$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, et par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \sin^{x(t)}$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $f(x)$ existe et est positif.

2) On note $g(x,t) = (\sin t)^x$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $x > -1$.
   - Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$,
   - pour tout $x > -1$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
   - pour tout $x > -1$, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(\sin(t))(\sin t)^x$, donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
   - Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]-1, +\infty[$,

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0, \frac{\pi}{2}], |g(x,t)| \leq |\ln(\sin t)(\sin t)^a|.$$

   On pose $\varphi : t \mapsto |\ln(\sin t)(\sin t)^a|$. La fonction φ est continue par morceaux, et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ car $\varphi(t) = o-(t \to 0)\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha = \frac{1-a}{2} < 1$.

Ainsi f est de classe C^1 sur tout segment de $]-1, +\infty[$ donc f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et $\forall x > -1, f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)(\sin t)^x dt$. Comme pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\ln(\sin t) \leq 0$, $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante.

3) Une intégration par parties donne pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x (1 - \cos^2 t) dt \\ &= f(x) - \left[\frac{(\sin t)^{x+1}}{x+1} \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{x+1} f(x+2) \end{aligned}$$

et donc $f(x+2) = \frac{x+1}{x+2} f(x)$.

4) Soit $x>0$. $\varphi(x+1)=(x+1)f(x+1)f(x)=(x+1)\times\frac{x+2}{x+1}f(x-1)f(x)=\varphi(x)$. On en déduit par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n)=\varphi(1)=f(0)f(1)=\frac{\pi}{2}$.

5) On remarque que $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\varphi(x+1)=\varphi(1)$ car φ est continue en 1. Comme f est continue en 0, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\frac{\pi}{2}$. D'où pour tout $x>-1$, $f(x)=\frac{\varphi(x+1)}{(x+1)f(x+1)}\underset{x\to -1}{\sim}\frac{1}{x+1}$.

Exercice 5 ★★

1) Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive. De plus $\frac{e^{-tx}}{1+t^2}=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par suite, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+$, $g(x,t)=\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, la fonction $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x>0,\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\frac{t}{1+t^2}e^{-tx}\text{ et }\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)=\frac{t^2}{1+t^2}e^{-tx}.$$

On en déduit que pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et $t\mapsto\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}^+,|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)|\leq e^{-at}.$$

Comme $t\mapsto e^{-at}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f est de classe C^2 sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) L'encadrement $0\leq\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt\leq\int_0^{+\infty}e^{-tx}dt=\frac{1}{x}$ valable pour tout $x>0$ permet d'obtenir $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6 ★★★

1) Pour $x\in\mathbb{R}$ et $t\geq 0$, on pose $f(x,t)=e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)$.
   - Pour tout $t\geq 0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt).$$

   - On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ donc intégrable.
   - Pour tout $a\in\mathbb{R}^+$,

$$\forall x\in[-a,a],\forall t\geq 0,|2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)|\leq 2a\operatorname{sh}(2at)e^{-t^2}.$$

Comme $t\mapsto 2a\operatorname{sh}(2at)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de dérivation sous le symbole intégral, F est de classe C^1 sur tout segment $[-a,a]$ inclus dans $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},F'(x)=\int_0^{+\infty}2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)dt.$$

Une intégration par parties donne alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F'(x)=\left[-e^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)\right]_0^{+\infty}+2x\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)$$

et donc F est solution de l'équation différentielle $y' - 2xy = 0$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$,

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (xt)^{2n} e^{-t^2}.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n(t)} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} (xt)^{2n} e^{-t^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers $t \mapsto f(x,t)$ qui est elle-même continue par morceaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{+\infty} |u_{n(t)}| \, dt = \frac{2^{2n} \, |x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt.$$

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$. Une intégration par parties donne $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2} I_n$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} |u_{n(t)}| \, dt = \frac{|x|^{2n}}{n!} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi la série $\sum \int |u_{n(t)}| \, dt$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_{n(t)} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}.$$

Exercice 7 ⋆⋆⋆

Comme f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

On prolonge g par continuité en posant $g(0) = 0$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \int_0^x f'(u) du = x \int_0^1 f'(tx) dt$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variables affines $u = tx$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$.

De plus, $\int_0^1 f'(0 \times t) dt = f'(0) = g(0)$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 f'(xt) dt.$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, $h(x,t) = f'(xt)$.

- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = t^n f^{(n+1)}(xt).$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur $[-a,a]$, elle y est bornée. D'où

$$\forall x \in [-a,a], \forall t \in [0,1], |t^n f^{(n+1)}(xt)| \leq 1 \times \sup_{[-a,a]} f.$$

Les fonctions constantes sont intégrables sur tout segment.

On en déduit que g est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(0)dt = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Exercice 8 ★★★★

On pose $f = \ln \circ \Gamma$. On sait que f est de classe C^2 et pour tout $x > 0$, $f''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma''(x)\Gamma(x) &\geq \left(\int_0^{+\infty} \sqrt{t^{x-1}e^{-t}} \times \sqrt{(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}} dt\right)^2 \\ &\geq \left(\int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 \\ &\geq \Gamma'(x)^2.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x > 0$, $f''(x) \geq 0$ et donc f est convexe.

Exercice 9 ★★★

1) Soit $t \neq 0$. Si $|t| \geq 1$, alors $|\frac{\sin(t)}{t}| \leq |\sin(t)| \leq 1$. On étudie $h : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur $]0,1]$. Cette fonction est dérivable deux fois et pour tout $t \in]0,1]$, $h'(t) = \frac{1}{t^2}(t\cos(t) - \sin(t))$ et $\frac{d}{dt}(t\cos(t) - \sin(t)) = -t\sin(t)$ d'où le tableau de variations suivant :

t	0	1
$t\cos t - \sin t$	0	$\searrow$
h	1	$\searrow$ $\sin 1$

On en déduit que la fonction $|h|$ est majorée par 1.

2) On pose pour tout $(x,t) \in (]0,+\infty[)^2$, $f(x,t) = h(t)e^{-xt}$. Pour tous x et t strictement positifs, $|f(x,t)| \leq e^{-xt}$ et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\, dt$ converge et $\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\, dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

3) Il s'agit d'une intégration par parties.

4) Soit $a > 0$. On pose $X = [a, +\infty[$ et $T = \mathbb{R}_*^+$.
   - Pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X (car $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur X)
   - pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T, et intégrable sur T d'après la question 2.

- pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur T,
- pour tout $(x,t) \in X \times T$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-at}$ et $\int_T e^{-at}dt$ converge.

On en déduit que g est de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, et donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \frac{-1}{1+x^2}$.

5) On en déduit que g est une primitive de $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et donc il existe une constante K telle que pour tout $x > 0$, $g(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + K$. De plus, pour $x > 0$, $|g(x)| \le \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\ dt \le \frac{1}{x}$ donc g a une limite nulle en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$, on peut conclure : $g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n(x) \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{n\pi}dt \le \frac{1}{n}$. Le changement de variables $\theta = t - \pi$ donne $u_{n+1}(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(\theta)\frac{|}{\theta+\pi}e^{-x(\theta+\pi)}d\theta \le u_{n(x)}$.

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n(x)$ converge et son reste $R_{n(x)}$ vérifie

$$|R_{n(x)}| \le |u_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0, et donc que la série de fonctions $\sum (-1)^n u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

7) Soient $X = \mathbb{R}^+$ et $T = [n\pi, (n+1)\pi]$.
- Pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X,
- pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T,
- pour tout $(x,t) \in X \times T$, $|f(x,t)| \le 1$ et l'intégrale $\int_T 1dt$ converge car T est un segment.

On en déduit que u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

8) Pour tout $x \ge 0$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ puisqu'il s'agit d'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues. En particulier g est continue en 0 et donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = g(0) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 ★★

Le changement de variables affine $t = u(x) + \theta(v(x) - u(x))$ donne

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = (v(x) - u(x)) \int_0^1 g(x,\theta)d\theta$$

où $g(x,\theta) = f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x)))$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral sur tout segment inclus dans I.

Exercice 11 ★★

On remarque que pour tout entier n et tout réel x,

$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right| \le \frac{2}{(x+1)(x+2)} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

De plus,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \longrightarrow -\infty$$

quand $n \to +\infty$ (série divergente).

Par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}dx = 0$.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

1) La fonction $t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω, et pour tout z vérifiant $\mathrm{Re}(z) > a$, $\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$; comme φ est intégrable sur $]0,1]$, f est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > a\}$ pour tout $a > -1$, donc sur Ω.
2) On remarque que pour tout $x > -1$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$ et donc $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.
3) Par intégration par parties, $(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}dt$. Or

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}dt\right| \leq \int_0^1 \left|t^{z+1}\right|dt \leq \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}dt = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2} \longrightarrow 0$$

quand $\mathrm{Re}(z) \to +\infty$.

D'où $f(z) \sim \frac{1}{2z}$.

Exercice 13 ⋆⋆

On pose pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$f(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+xt}.$$

Pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, et

$$\forall t \geq 0, |f(x,t)| \leq e^{-t}$$

donc F est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $t \geq 0$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^n d'après les théorèmes généraux, et

$$\forall x \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}}t^n e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq n! t^n e^{-t}.$$

On en déduit que F est de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$, et

$$F^{(n)}(0) = \int_0^{+\infty}(-1)^n n! t^n e^{-t}dt = (-1)^n (n!)^2.$$

Exercice 14 ⋆⋆⋆

1) Une intégration par parties permet de conclure.
2) Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il existe un réel A tel que

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(t)|dt \leq \varepsilon.$$

Soit $\eta > 0$ tel que pour tout $x \geq \eta$, $\left|\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)dt\right| \leq \varepsilon$.

D'où pour tout $x \geq \eta$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt\right| &\leq \left|\int_0^{A} \varphi(t)\cos(xt)dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt\right| \\ &\leq \varepsilon + \int_A^{+\infty} |\varphi(t)|dt \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = 0$.

Exercice 15 ★★

On pose pour tout $x > 0$ et $t \geq 0$, $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux.

Soit $t \geq 0$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2}e^{-xt} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}.$$

Pour tout $a > 0$, $x > a$ et tout $t \geq 0$,

$$\begin{cases} |f(x,t)| \leq e^{-at} \\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at} \\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-at} \end{cases}$$

donc F est de classe C^2 sur $]a,+\infty[$ pour tout réel strictement positif a, donc F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$$

donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.