

CORRIGÉ de l'exercice 1 du TD 18.

Nerci à :

CASSIN
Naëlle

Exercice 1 :

la fonction

• Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue
 $(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 + y^3}{x^2 + 2y^2} & \text{sinon} \end{cases}$

en $(0, 0)$

$$\text{i.e. } |f(x, y)| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, 0) = 0$$

$$|f(x, y)| = \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + 2y^2}$$

On

$$|f(x, y)| \geq 0$$

α et $\begin{cases} |x^3 + y^3| \leq |x^3| + |y^3| & \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ |x^3| = |x|^3 = \sqrt{x^2}^3 \leq \sqrt{x^2 + y^2}^3 \\ |y^3| = |y|^3 = \sqrt{y^2}^3 \leq \sqrt{x^2 + y^2}^3 \\ x^2 + 2y^2 \geq \sqrt{x^2 + y^2}^2 \end{cases}$

Donc

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a bien :

$$|f(x, y)| \xrightarrow{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0} 0 = f(0, 0)$$

• La fonction g n'est pas continue en $(0,0)$ car

$$g(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{(y^2 + y^4)} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)$$

• Montrons que f est continue en $(0,0)$

i.e. $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0,0)} f(0,0)$

i.e. $|f(x, y)| \xrightarrow{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0} f(0,0) = 0$

$$|f(x, y)| = \frac{|x^3 + y^4|}{|x| + y^2} \geq 0$$

D'une part,

$$\begin{cases} |x^3 + y^4| \leq |x^3| + |y^4| \\ |x^3| = |x|^3 = \sqrt{x^2}^3 \leq \sqrt{x^2 + y^2}^3 \\ |y^4| = |y|^4 = \sqrt{y^2}^4 \leq \sqrt{x^2 + y^2}^4 \end{cases}$$

Donc $|x^3 + y^4| \leq \sqrt{x^2 + y^2}^3 + \sqrt{x^2 + y^2}^4$

D'autre part, pour $|x| < 1$

$$|x| \geq x^2$$

donc $|x| + y^2 \geq |x^2 + y^2| = \sqrt{x^2 + y^2}^2$

On a Alors

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^3 + \sqrt{x^2 + y^2}^4}{\sqrt{x^2 + y^2}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}^2$$

On $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}^2 \xrightarrow{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0} 0$

D'après le théorème des gendarmes,

$$|f(x, y)| \xrightarrow{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0} 0$$