* **Théorème 2 (Décomposition de Dunford).** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente, tel que*

$$(i) \quad f = d + n \qquad (ii) \quad n \circ d = d \circ n.$$

Démonstration. On écrit $P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, et pour tout i, on note $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{\alpha_i}$ les sous espaces caractéristiques de f.

♡ *Existence.* Comme $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, il suffit de définir d et n sur chaque N_i. On les définit comme suit :

$$\forall i, \forall x \in N_i, \quad d(x) = \lambda_i x \quad \text{et} \quad n(x) = f(x) - \lambda_i x.$$

Autrement dit, pour tout i on a $d_i = d_{|N_i} = \lambda_i \,\mathrm{Id}_{|N_i}$ et $n_i = n_{|N_i} = f_{|N_i} - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{|N_i}$. Les d_i et n_i sont des endomorphismes de N_i car N_i est stable par f donc par d et n.

Ainsi définie, d est diagonalisable. Pour tout i, on a $n_i^{\alpha_i} = 0$ (puisque par définition de N_i, pour tout $x \in N_i$, $(f - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{\alpha_i}(x) = 0$). Si $\alpha = \sup n_i$, n^α s'annule donc sur chaque N_i donc sur $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$, c'est-à-dire $n^\alpha = 0$.

Il reste à montrer que d et n commutent. Pour tout i, on a $d_i = \lambda_i \,\mathrm{Id}_{N_i}$ donc $n_i \circ d_i = d_i \circ n_i$, c'est-à-dire que d et n commutent sur chaque N_i, donc sur $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$.

Unicité. Soit (d', n') un autre couple vérifiant les conditions. On remarque d'abord que $f \circ d' = d' \circ f$, donc pour tout i, N_i est stable par d' (pour tout $x \in N_i$, $(f - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{\alpha_i}[d'(x)] = d' \circ (f - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{\alpha_i}(x) = 0$). Comme $d_{|N_i} = \lambda_i \,\mathrm{Id}_{N_i}$, on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur N_i. Ceci étant vrai pour tout i, comme $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$, on en déduit que d et d' commutent. De plus d et d' sont diagonalisables, on peut donc les diagonaliser dans une même base, ce qui prouve que $d' - d$ est diagonalisable.

Comme $n = f - d$, $n' = f - d'$ et que $d \circ d' = d' \circ d$, n et n' commutent. Si on choisit p et q tels que $n^p = n'^q = 0$, on a donc

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i+j=p+q} C_{p+q}^{i} n^i (-1)^j n'^j = 0$$

(dans chaque terme de la somme, on a soit $i \geq p$, soit $j \geq q$). Donc $n - n' = d' - d$ est nilpotent. Or nous avions montré que $d' - d$ est diagonalisable, donc $d' - d = 0$. Autrement dit, $d = d'$ et donc $n = n'$. $\square$

♡ La preuve de l'existence utilise les sous-espaces caractéristiques (plus précisément, l'exercice 39 du chapitre IV).

L'unicité se prouve en utilisant le théorème de diagonalisation simultanée (Kdo du 10/11/2025).

* Cette preuve est tirée du livre "Les maths en tête - Algèbre" de X. GOURDON.