Programme de la colle n° 18

Semaine du 02/03/2026

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien ▷ **chapitre XII & TD** n^o **12** :

1. MATRICES ORTHOGONALES

$$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff A^T \cdot A = I_n \iff A^T = A^{-1} \iff A \cdot A^T = I_n$$

$\iff$ les colonnes (ou les lignes) de A forment une *b.o.n.*

(de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique)

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ et tous ces ensembles sont des groupes stables par transposition.

2. ISOMÉTRIES VECTORIELLES

$f \in O(E) \iff f$ conserve le produit scalaire

$\iff f$ est linéaire et conserve la norme

$\iff f$ est linéaire et transforme une *b.o.n.* de E en une *b.o.n.* de E

$\iff f$ est linéaire et $[f]_{b.o.n.} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

3. MATRICES SYMÉTRIQUES, ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

$f \in S(E) \iff \forall (u,v) \in E^2,\ \langle f(u)|v\rangle = \langle u|f(v)\rangle \iff [f]_{b.o.n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

4. ADJOINT d'un endomorphisme : existence et unicité

$\forall (u,v) \in E^2,\ \langle f^*(u)|v\rangle = \langle u|f(v)\rangle \iff [f^*]_{b.o.n} = [f]_{b.o.n}^T$

5. STABILITÉ DE L'ORTHOGONAL d'un *sev* stable par une isométrie vectorielle ou par un endomorphisme autoadjoint ; un *sev* F est stable par f si, et seulement si, son orthogonal $F^\perp$ est stable par f^*
6. THÉORÈME SPECTRAL : les *sep* d'un endomorphisme f autoadjoint sont orthogonaux deux à deux, ses valeurs propres sont réelles et il existe une *b.o.n* formée de vecteurs propres de f.

   Version matricielle :

   $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \implies \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ P^TAP = P^{-1}AP$ est diagonale
7. Endomorphisme autoadjoint (DÉFINI) POSITIF : définition et caractérisation par le spectre
8. Rotations & réflexions en dimension 2 ou 3, puis n.

À venir : Intégrales à paramètre