Corrigé de la feuille de T.D. n° 18

Fonctions de deux variables

12 février 2026

Exercice 1. Les fonctions suivantes définies par

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+2y^2} \quad , \qquad g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad , \quad h(x,y) = \frac{x^3+y^4}{|x|+y^2}$$

pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et par $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$ sont-elles continues en $(0,0)$?

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

— En chaque point $(x,y) \neq (0,0)$, les deux dérivées partielles

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_2 f(x,y) = \frac{4y^3x^2+2y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

existent (car f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) et sont continues (car les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont des quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas).

— En $(0,0)$, la dérivée partielle $\partial_1 f$ existe et vaut 0 car

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Et la fonction $\partial_1 f$ est continue en $(0,0)$ car $\partial_1 f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \partial_1 f(0,0)$. En effet :

$$0 \leq |\partial_1 f(x,y)| \leq \frac{2|x|\cdot|y|^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 2\frac{\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} \leq 2\|(x,y)\|$$

car $|x| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ et $|y| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$. D'où $\partial_1 f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

— De même, $\partial_2 f(0,0)$ existe et vaut 0 car

$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{k^2-0}{k} = k \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Et la fonction $\partial_2 f$ est continue en $(0,0)$ car $\partial_2 f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \partial_2 f(0,0)$. En effet

$$0 \leq |\partial_2 f(x,y)| \leq \frac{4|y|^3|x|^2+2|y|^5}{(x^2+y^2)^2} \leq 6\|(x,y)\|$$

Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$, que $\partial_1 f(0,0)$ existe mais que $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

$|\sin(u)| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, d'où $|f(x,y)| \leq \dfrac{|xy|}{|x|+|y|}$. Or $|xy| \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} \leq \|(x,y)\|^2$. Et $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|xy| \geq x^2+y^2$, d'où $|x|+|y| \geq \|(x,y)\|$. Donc

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} \leq \|(x,y)\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

D'où (gendarmes) : $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Or $f(0,0)=0$ par définition. Donc f est continue en $(0,0)$.

$\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{\frac{\sin(h\cdot 0)}{|h|+0}-0}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\partial_1 f(0,0)$ existe et $\partial_1 f(0,0)=0$.

Soient $x>0$ et $y>0$: alors $|x|=x$, $|y|=y$, d'où $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x+y}$ et $\partial_1 f(x,y) = \dfrac{y\cos(xy)(x+y)-\sin(xy)}{(x+y)^2}$.

En particulier, $\partial_1 f(x,x) = \dfrac{2x^2\cos(x^2)-\sin(x^2)}{(2x)^2} = \dfrac{2x^2(1+\varepsilon(x))-(x^2+x^2\varepsilon(x))}{(2x)^2} = \dfrac{x^2+x^2\varepsilon(x)}{4x^2} = \frac{1}{4}+\varepsilon(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{4} \neq \partial_1 f(0,0)$. D'où la fonction $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4 (Dériver suivant un vecteur)**.** Soient un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, un point $a=(a_1,a_2)\in U$ et un vecteur $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est **dérivable en le point** a **suivant le vecteur** v si la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

existe et est finie. On note alors $D_v f(a)$ cette limite et on l'appelle la dérivée de f en a suivant v.

1. Montrer que : si f est dérivable en a suivant tout vecteur v, alors f admet des dérivées partielles en a.
2. Soit $g(x,y) = \dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$.
   (a) Montrer que la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$.
   (b) Montrer que g est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur (x,y).
3. Montrer que : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f est dérivable en tout point $a\in U$ suivant tout vecteur v et exprimer $D_v f(a)$ à l'aide des dérivées partielles de f en a.

   La réciproque est-elle vraie ?

---

1. La fonction f est dérivable en a suivant chaque vecteur de la base (e_1,e_2). D'où $\dfrac{f(a+te_1)-f(a)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} D_{e_1}f(a)$. Or $\dfrac{f(a+te_1)-f(a)}{t} = \dfrac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t}$, qui a donc une limite finie, égale à $D_{e_1}f(a)$. Donc $\partial_1 f(a)$ existe et est égal à $D_{e_1}f(a)$. De même, $\partial_2 f(a)$ existe et est égal à $D_{e_2}f(a)$.
2. (a) La fonction g n'est pas continue en $(0,0)$ car $(x,x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ mais $g(x,x^2)=\frac{1}{2}$ ne tend pas vers $g(0,0)=0$.

   (b) Soient $a=(0,0)$ et $v=(x,y)\neq(0,0)$. Alors $\frac{g(a+tv)-g(a)}{t} = \frac{g(tx,ty)}{t} = \frac{t^3x^2y}{t^4x^4+t^2y^2}$, d'où :

   — (premier cas) si $y\neq 0$, alors $\frac{g(tx,ty)}{t} = \frac{x^2y}{t^2x^4+y^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{x^2}{y}$;

   — (second cas) si $y=0$, alors $\frac{g(tx,ty)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   Donc g est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur et $D_{(x,y)}g(0,0)$ est égal à $\dfrac{x^2}{y}$ si $y\neq 0$ et est égal à 0 si $y=0$.
3. Soit $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f(a+tv) = f(a_1+tv_1,a_2+tv_2) = f(a_1,a_2)+tv_1\partial_1 f(a_1,a_2)+tv_2\partial_2 f(a_1,a_2)+\|tv\|\varepsilon(tv)$ d'après la formule de Taylor & Young. D'où, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} = v_1\partial_1 f(a)+v_2\partial_2 f(a)+\|v\|\varepsilon(tv) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} v_1\partial_1 f(a)+v_2\partial_2 f(a)$. Donc f est dérivable en a suivant v et $D_v f(a) = v_1\partial_1 f(a)+v_2\partial_2 f(a)$.

   La réciproque est fausse : la question précédente exhibe un contre-exemple. En effet, elle est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur. Et aussi en tout autre point (x,y) car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}$. Mais elle n'est pas continue en $(0,0)$, donc a fortiori pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ▷ **corollaire 14 du chapitre XVIII**.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \varphi(x^2+y^2)$.

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \varphi(\frac{y}{x})$.

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}$. Interpréter géométriquement le résultat.

---

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \varphi(x^2+y^2)$.

   φ est dérivable, d'où : $\partial_1 f(x,y) = 2x\varphi'(x^2+y^2)$ et $\partial_2 f(x,y) = 2y\varphi'(x^2+y^2)$. Or φ‘ est continue, d'où $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues (car ce sont des produits et composées de fonctions continues). Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

   De plus $x \cdot \partial_2 f(x,y) - y \cdot \partial_1 f(x,y) = x \cdot 2y\varphi'(x^2+y^2) - y \cdot 2x\varphi'(x^2+y^2) = 0$.

   Or $x \cdot \partial_2 f(x,y) - y \cdot \partial_1 f(x,y) = \begin{vmatrix} x & \partial_1 f(x,y) \\ y & \partial_2 f(x,y) \end{vmatrix} = \det(\vec{x}, \nabla f(\vec{x}))$. D'où le vecteur $\vec{x} = (x,y)$ et le gradient $\nabla f(\vec{x})$ sont colinéaires. Pourquoi ? Car le cercle d'équation $x^2+y^2 = \text{cte}$ est une courbe de niveau de la fonction f et le gradient est orthogonal à cette courbe de niveau.
2. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \varphi(\frac{y}{x})$.

   La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ car $\partial_1 g(x,y) = \dfrac{-y}{x^2}\varphi'(\frac{y}{x})$ et $\partial_2 g(x,y) = \dfrac{1}{x}\varphi'(\frac{y}{x})$ et φ' est continue. De plus $x \cdot \partial_1 g(x,y) + y \cdot \partial_2 g(x,y) = 0$. Or $x \cdot \partial_1 g(x,y) + y \cdot \partial_2 g(x,y)$ est égal au produit scalaire $\langle \vec{x}, \nabla g(\vec{x}) \rangle$. D'où le vecteur $\vec{x} = (x,y)$ et le gradient $\nabla g(\vec{x})$ sont orthogonaux. Pourquoi ? Car la droite (privée de l'origine) d'équation $\dfrac{y}{x} = \text{cte}$ est une courbe de niveau de la fonction g et le gradient est orthogonal à cette courbe de niveau.

Exercice 6. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \mapsto f(x)$ est **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et homogène de degré α, alors

1. les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont homogènes de degré $\alpha - 1$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\quad x_1\partial_1 f(x) + x_2\partial_2 f(x) = \alpha f(x)$.

---

1. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Les deux fonctions définies par $g(x) = f(tx)$ et $h(x) = t^\alpha f(x)$ sont égales et de classe $\mathcal{C}^1$. Leurs dérivées partielles :
   $$\partial_i g(x) = t\partial_i f(tx) \qquad \text{et} \qquad \partial_i h(x) = t^\alpha \partial_i f(x)$$
   sont égales pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, d'où (en divisant par t) :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_i f(tx) = t^{\alpha-1}\partial_i f(x).$$
   Chaque dérivée partielle est donc homogène de degré $\alpha - 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Les deux fonctions définies par $G(t) = f(tx)$ et $H(t) = t^\alpha f(x)$ sont égales et dérivables. Leurs dérivées
   $$G'(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{d(tx_i)}{dt}\partial_i f(tx) = \sum_{i=1}^{2} x_i\partial_i f(tx) \quad \text{et} \quad H'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$
   sont égales pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, donc en particulier pour $t = 1$:
   $$\sum_{i=1}^{2} x_i\partial_i f(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 7 (Une équation aux dérivées partielles)**.** En passant en coordonnées polaires, déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall (x,y) \neq (0,0), \quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Soit, pour tout $r > 0$ et tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ car c'est la composée $f\circ M$ de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: la fonction f et la fonction $M : (r,\varphi)\mapsto(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. De plus,

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = -r\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

grâce à la règle de la chaîne.

D'où $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \dfrac{\partial F}{\partial\varphi} = 0 \iff F(r,\varphi) = k(r)$, où k est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 8. 1. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

En chaque point critique, préciser s'il y a un extremum local, si c'est un minimum ou un maximum et s'il est global.

2. Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x,y) = x\ln^2 x + xy^2.$$

Étudier les points critiques de la fonction f, ses extrema locaux et ses extrema globaux.

Exercice 9. Déterminer tous les extrema locaux de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y)\mapsto \sin(xy).$$

Pour chacun d'entre eux, préciser si c'est un minimum ou un maximum et s'il est global.

Analyse : $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, d'où, s'il y a un extremum local en point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors (x,y) est un point critique de f :

$$\nabla f(x,y)(0,0) \iff \begin{cases}\partial_1 f(x,y) = y\cos(xy) = 0\\ \text{et}\\ \partial_2 f(x,y) = x\cos(xy) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\cos(xy) = 0\\ \text{ou}\\ x = y = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\exists p\in\mathbb{Z},\ xy = \frac{\pi}{2} + p\pi\\ \text{ou}\\ (x,y) = (0,0)\end{cases}.$$

Les points critiques de f sont donc :

— l'origine $(0,0)$;
— les points de la réunion $\underset{p\in\mathbb{Z}}{\cup} H_p$ des hyperboles H_p d'équation $xy = \frac{\pi}{2} + p\pi$.

Synthèse : $f(0,0) = 0$ et, au voisinage de $(0,0)$: $f(0+h, 0+k) = \sin(hk)$ est strictement positif si $hk > 0$ ou strictement négatif si $hk < 0$. Il n'y a donc pas d'extremum local en $(0,0)$.

Sur chaque hyperbole H_p, $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = (-1)^p$:

— si p est pair, alors $f(x,y) = 1$ qui est un maximum global car $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(xy)\leq 1$;
— si p est impair, alors$f(x,y) = -1$ qui est un minimum global car $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(xy)\geq -1$.

Exercice 10. On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant l'équation suivante :

$$\forall (x,y,t)\in\mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y) \quad (\star)$$

1. Démontrer que, si $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifie $(\star)$, alors :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles précédente et en déduire l'ensemble des solutions de $(\star)$.

---

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $M \ :, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto M(t) = (x+t, y+t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $f \circ M$ est donc aussi $\mathcal{C}^1$ par composition de fonctions $\mathcal{C}^1$. Or cette fonction $f \circ M$ est constante d'après $(\star)$, donc sa dérivée en 0 est nulle :

$$0 = (f \circ M)'(t) = \frac{d(x+t)}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{d(y+t)}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la règle de la chaîne. En particulier, si $t = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2. On effectue le changement de corrdonnées $(u, v) = (x+y, x-y)$ équivalent à $(x, y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$. On pose $F(u, v) = f(x, y)$. La fonction F est $\mathcal{C}^1$ car c'est la composée de deux fonctions $\mathcal{C}^1$. On calcule les dérivées partielles de f en fonction de celles de F grâce à la règle de la chaîne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v} \end{cases}.$$

On résout l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad &\iff \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \\ &\iff \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ F(u, v) = C(v), \text{ où } C \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ &\iff \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = C(x-y) \end{aligned}$$

Si une fonction f vérifie $(\star)$, alors elle est une solution de l'EDP, d'où $f(x, y) = C(x-y)$. Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie $(\star)$ car

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = C(x+t-(y+t)) = C(x-y) = f(x, y).$$