

T H È M E N° 1

Suites & séries

19 février 2026

Il s'agit du premier des quatre thèmes de révisions.

OBJECTIF : Réviser les suites & séries numériques [▷ I](#), les suites & séries de fonctions [▷ V & VII](#) et les séries entières [▷ IX](#). Et aussi les suites de vecteurs [▷ XI](#) (viendront à la rentrée les séries de vecteurs [▷ Annexe C](#)). Le théorème de la convergence dominée sera révisé dans le thème *Intégrales*.

MODE D'EMPLOI : [▷ Colle3.2](#) renvoie à la colle n° 3 exercice 2 ; [▷ IV.23](#) renvoie au chapitre IV énoncé (théorème, définition, exemple, etc) 23 ; [▷ IV§2](#) renvoie au chapitre IV paragraphe 2 ; [▷ TD11.3](#) renvoie à la feuille de TD n° 11 exercice 3 ; [▷ DS4*.2q4](#) renvoie au DS n° 4 MPI* exercice 2 question 4.

Ne négligez aucun des [▷ renvois](#) : il s'agit d'un point de cours ? (re)lisez-le. Il s'agit d'un exercice ? si vous l'aviez déjà résolu, comparez le corrigé et votre copie corrigée d'antan ; sinon, c'est le moment de le résoudre ou *a minima* de lire le corrigé. Au fur et à mesure, essayez de résoudre, rédiger et me rendre notamment les exercices 1 à 5 dans la case *Thème 1* du Cahier de Prépa.

A • Réviser la sommation des relations de comparaison [▷ I§6&7, TD1.9](#) et son analogue : l'intégration des relations de comparaison [▷ III.15&16, TD3.9&12](#).

Exercice 1. 1. Prouver l'un après l'autre les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \ln(n!) &= n \ln n + o(n \ln n) \\
 \text{(b)} &= n \ln n - n + o(n) \\
 \text{(c)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n) \\
 \text{(d)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + o(1) \\
 \text{(e)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

où K est un réel. En déduire un équivalent de $n!$ (le même qu'au [▷ DS4*.2q11](#)).

2. Déterminer un équivalent, quand n tend vers l'infini, de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\text{sh } k}{\text{ch } k}$. Montrer que la suite des réels $v_n = n - S_n$ converge vers un réel ℓ et déterminer un équivalent de $\ell - v_n$.

B • Comment mq une série de fonctions converge uniformément :

1. en montrant que la série converge normalement ;
2. en montrant que la suite des restes converge uniformément vers 0, parfois en utilisant le T.S.A. [▷ TD7.1q2&3](#) ;
3. mais pas normalement [▷ VII.8](#).

C • Comment mq une suite ou une série de fonctions converge simplement mais pas uniformément :

1. avec une suite de points [▷ TD5.3 & Colle9.1q3](#) ;
2. car la série ne cv pas uniformément si la suite ne converge pas uniformément vers 0 [▷ VII.3&4, Colle11.2q5](#) ;

3. par l'absurde car on perd la continuité ▷ [Colle11.2q5](#), [Colle 11.1q3c](#) ou l'interversion de $\int$ et $\lim$ ▷ [TD5.6q3](#) ou l'interversion des limites ▷ [TD7.3q8](#) & [TD7.6q4](#) (une occasion de réviser la fonction zêta de Riemann ▷ [TD1.7](#), [TD8.10](#)).

Exercice 2 (Un développement asymptotique de la fonction ζ). On a déjà montré que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ ▷ [TD1.7q4](#) et on veut montrer que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)_{x \rightarrow 1^+}$ où γ est la constante d'Euler ▷ [I§7](#). Pour ce faire,

on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$ pour tous $x \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : **a)** $0 \leq f_n(x) \leq \int_n^{n+1} \frac{x dt}{t^{x+1}}$;

b) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[1, 2]$; **c)** $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \gamma$.

D • Stratégie de la « barrière » ▷ [V.8](#), [TD7.2q4](#) & [DS5*.1q2](#).

E • La convergence uniforme permet d'intégrer terme à terme une série de fonctions continues sur un segment. Réviser aussi le théo. d'intégration terme à terme sur un intervalle qc ▷ [VII.16&17](#), [TD7.4&7.5q4](#).

Exercice 3 (après avoir révisé ▷ [TD5.7](#) & [TD9.6](#)). Soit la suite définie par $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum u_n x^n$ converge-t-elle ? Pour chacune de ces valeurs, calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

F • Une série entière converge normalement (et donc uniformément) :

- sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence ▷ [IX.13](#) & [figure IX.2](#), [TD11.8q1](#) ;
- mais pas toujours sur l'intervalle ouvert de convergence ▷ [VII.4](#).

G • Comment mq une fonction est développable en série entière :

- en utilisant le produit de Cauchy ▷ [IX.27](#) & [TD9.8q1](#) ;
- en intervertissant série et intégrale ▷ [DS5*2024-2025.3q5](#) ;
- en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral ▷ [IX.25&26](#).

La série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ converge parfois vers ladite fonction (dans le ▷ [DS5*2024-2025.2](#), on montre que la série de Taylor de la fonction $\tan$ converge à la q4 et que c'est bien vers la fonction $\tan$ à la q8), converge parfois vers une autre fonction ▷ [IX.24](#) et parfois même diverge pour tout $x \neq 0$ ▷ [Colle14.1](#).

Exercice 4 (tiré de CCINP MATHS 1 MP 2019).

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1.

Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, +1[$, $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$ qui n'est pas une série entière.

- Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série numérique $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

On note, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. Soit un réel $b \in]0, 1[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[-b, b]$.
En déduire que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $] -1, 1[$ et exprimer, pour tout $x \in] -1, +1[$, $f'(x)$ comme la somme d'une série.
3. En utilisant une série entière, déterminer la valeur ℓ de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
4. Dans cette question, $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$.
 - (a) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
 - (b) Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +1[$, $h_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$. Montrer que la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.
 - (c) En déduire, en fonction de ℓ , un équivalent de $f(x)$ quand x tend 1^- .

Exercice 5 (tiré de MINES-PONTS MATHS 2 MPI 2023).

Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ pour tout $x > -1$. ▷ TD13.4

1. Soit n un entier. Montrer que $f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. ▷ DS5*2024-2025.3q1c
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $D_n = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin t))^n dt$ est convergente.
3. Montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du.$$
5. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$ converge et calculer sa valeur.
6. En déduire que

$$D_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (-1)^n n!$$
7. Soient $x > -1$ et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f_n(t) = \frac{(\ln(\sin t))^n}{n!} x^n.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

8. Prouver que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et donner son développement en série entière.
9. En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.