

T H È M E N° 2
Algèbre linéaire

24 février 2026

OBJECTIF : Réviser l'algèbre linéaire [▷ II](#) sans oublier la stabilité de l'orthogonal [▷ XII§4](#) ni la continuité des applications linéaires [▷ XI§8 & XI§9](#). Et la réduction des endomorphismes [▷ IV](#) sans oublier le théorème spectral [▷ XII.20,21&22](#).

A • NOYAU, IMAGE ET RANG :

- En dimension finie, savoir déterminer une base du noyau mais aussi de l'image. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un *ev* E et si f est une application linéaire sur E , alors $\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Autrement dit : la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de l'image. Et on obtient une base de $\text{Im} f$ en libérant cette famille. En prenant garde :
 - pour un endo. sur l'*ev* $E = \mathbb{K}_n[X]$, à ne pas confondre d'une part les vecteurs (qui sont des polynômes) qui forment une base de $\text{Ker}(f)$ ou de $\text{Im}(f)$, et les vecteurs-colonnes qui forment une base de $\text{Ker}([f]_{\mathcal{B}})$ ou de $\text{Im}([f]_{\mathcal{B}})$;
 - pour un endo. f sur l'*ev* $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, à ne pas confondre la matrice de f (dans une base $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ de E) qui est une matrice $n^2 \times n^2$ et les matrices « mangées » par f qui sont des matrices $n \times n$ [▷ TD2.13 & TD12.10](#).
- Le théorème du rang résulte d'un isomorphisme [▷ II.2, TD2.18 & DS3*2024-2025.pb.q23](#), il ne dit pas que noyau et image sont toujours supplémentaires [▷ II.3](#) et il implique que bijective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ injective en dimension finie si les *ev* de départ et d'arrivée ont même dimension.
- Au sujet des itérés, réviser les noyaux emboîtés [▷ TD2.12](#) mais aussi les limites d'une suite géométrique [▷ Colle16.1q1](#) ou d'une somme géométrique [▷ annexeC.3 & DS5*2014-2025.4q3b](#) et encore les endomorphismes nilpotents [▷ II.33&34, IV.25 & preuve du théo IV.37, TD11.9](#).
- Réviser les matrices de rang 1 [▷ TD 2.4, TD 4.7, TD8.9, DS5*.2](#) et celles de rang 2 [▷ Colle7.2](#).

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ une matrice de rang 2.

Exprimer le polynôme caractéristique de A en fonction de n , $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$.

- Le noyau est aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 : en particulier, un endomorphisme f est injectif *ssi* $0 \notin \text{Sp}(f)$, une matrice M est inversible *ssi* $0 \notin \text{Sp}(M)$ [▷ IV.13, TD 4.11, TD12.7q2, TD12.13q2 & DS5*2024-2025.4q3b](#). Et le sous-espace propre $\text{Ker}(\text{id} - f)$ associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs invariants : l'axe d'une rotation, l'hyperplan d'une réflexion, le *sev* sur lequel on projette, etc

Exercice 7. À toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, on associe la fonction $u(f)$ définie par

$$u(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad u(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- Montrer que u est un endomorphisme de l'*ev* $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
- Cet endomorphisme est-il injectif? surjectif?
- Déterminer l'ensemble $E_1(u)$ des vecteurs invariants par u . Quel est le spectre de u ?

B • Linéarité et continuité ▷ [XI§8 & XI§9](#).

Si l'*evn* de départ n'est pas de dimension finie, alors une application linéaire n'est pas toujours continue ▷ [XI.38 & Colle17.2q3](#). Si l'*ev* de départ est de dimension finie, alors une application linéaire ou multilinéaire est toujours continue.

Et ça peut servir au moment de passer à la limite :

▷ [TD11.9q.2, DS5*2024-2025.4q3b, Kdo04/02/2026, DS6*.pb1q14 & annexeC](#).

La continuité de l'application $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^k$ peut se prouver en utilisant ▷ [XI.46](#) ou en composant $A \mapsto (A, A, \dots, A)$ et $(M_1, M_2, \dots, M_k) \mapsto M_1 \cdot M_2 \cdots M_k$ resp. linéaire et multilinéaire sur un *ev* de dim. finie. De même, le déterminant $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$ est continu ▷ [Colle16.1q2](#) car c'est la composée de $A \mapsto (C_1, C_2, \dots, C_n)$ et $(C_1, C_2, \dots, C_n) \mapsto \det(C_1, C_2, \dots, C_n)$ resp. linéaire et multilinéaire sur un *ev* de dim. finie ; mieux, il est de classe $\mathcal{C}^1$, donc différentiable, donc continu ▷ [XV](#).

Exercice 8 (tiré de X-ENS MATHS PSI 2014, comme l'exercice du ▷ [DS6*](#)).

1. On note K la fonction définie de $[0, 1]^2$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$K(s, t) = (1 - s)t \quad \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \quad \text{et} \quad K(s, t) = (1 - t)s \quad \text{sinon}$$

et T l'application définie sur $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in E, \forall s \in [0, 1], T(f)(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t) dt.$$

En écrivant $T(f)$ comme la somme de deux intégrales, montrer que T est un endomorphisme de E .

2. On munit E de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

Montrer que l'endomorphisme T est continu.

3. Soit $f \in E$. Montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $T(f)'' = -f$.
4. Montrer que l'endomorphisme T est injectif.
5. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda Id - T)$. Montrer que, si $f \in E_\lambda$, alors

$$\lambda f'' + f = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0.$$

6. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer E_λ .

C • SOMMES ▷ [II§3](#).

1. Deux *sev* F et G d'un *ev* E sont en somme directe :

$$\begin{aligned} &\iff F \cap G = \{0_E\} \quad (**); \\ &\iff \dim(F + G) = \dim F + \dim G \quad (\text{en dimension finie}) \quad (*); \\ &\iff F \perp G \quad (\text{si } E \text{ est préhilbertien}) \quad \text{▷} \quad \text{VIII.17.} \end{aligned}$$

2. Deux *sev* F et G d'un *ev* E sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} &\iff \text{tt vecteur s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un vecteur de } F \text{ et d'un vecteur de } G \quad (*); \\ &\iff F + G = E \text{ et } F \cap G = \{0_E\} \quad (**); \\ &\iff F + G = E \text{ et } \dim(F + G) = \dim F + \dim G \quad (\text{en dimension finie}) \quad (*); \\ &\iff \dim F + \dim G = \dim E \text{ et } F \cap G = \{0_E\} \quad (\text{en dimension finie}) \quad (**); \\ &\iff \text{ils sont les noyau et image d'un projecteur}; \\ &\iff G = F^\perp \quad (\text{si } E \text{ est préhilbertien et } F \text{ est de dimension finie}) \quad \text{▷} \quad \text{VIII.23.} \end{aligned}$$

3. Les propriétés (*) se généralisent à plus de deux *sev*. Mais pas les propriétés (**): des *sev* deux à deux en somme directe ne sont pas nécessairement en somme directe (pensez, dans $\mathbb{R}^2$, aux *sev* $\text{Vect}(i)$, $\text{Vect}(j)$ et $\text{Vect}(i + j)$). Par contre, des *sev* deux à deux orthogonaux sont en somme directe ▷ [VIII.14](#).

Enfin, se rappeler que $F \oplus G = F' \oplus G = E \not\Rightarrow F = F'$ car un supplémentaire n'est pas unique.

Par contre $F \overset{\perp}{\oplus} G = F' \overset{\perp}{\oplus} G = E \implies F = F' = G^\perp$ car le supplémentaire orthogonal est unique.

4. Le lemme des noyaux [▷ II.35](#) permet de montrer que des *sev* sont en somme directe (c'est le cas des *sep* E_λ d'un endomorphisme [▷ la seconde preuve de IV.16](#)) voire supplémentaires (c'est le cas des sous-espaces caractéristiques C_λ [▷ IV.37&38](#)).

Les sous-espaces caractéristiques permettent de décomposer une matrice en la somme d'une diagonale et d'une nilpotente qui commutent [▷ IV.39, DS6*.pb1q15, Kdo11/02/2026](#).

D • HYPERPLANS :

- (en dimension finie ou infinie) H est un hyperplan de E ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ssi H est un supplémentaire d'une droite vectorielle [▷ II.12](#).
- (si l'*ev* E est muni d'une norme) tout hyperplan H est un fermé de E si E est de dimension finie [▷ XI.53](#). Si l'*ev* E est normé et de dimension infinie alors H est, ou bien fermé, ou bien dense dans E [▷ Colle17.2](#). (Dans le même esprit : tout *sev* de dimension finie d'un *evn* est un fermé de E [▷ annexeB](#).)
- (si l'*ev* E est muni d'un produit scalaire) l'orthogonal d'une droite est toujours un hyperplan [▷ VIII.27](#). L'orthogonal d'un hyperplan est toujours une droite si E est de dimension finie [▷ VIII.27](#), mais pas toujours si E est de dimension infinie [▷ TD8.7q4](#).

E • Avec un POLYNÔME ANNULATEUR :

- on peut calculer l'inverse [▷ II.26](#) ou les puissances [▷ II.28](#) d'une matrice ;
- on peut étudier le spectre d'un endomorphisme car le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme P annulateur de f : $\lambda \in \text{Sp}(A) \implies P(\lambda) = 0$. Et $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0 \iff \mu_A(\lambda) = 0$ [▷ revoir](#)
 $\iff$
[la prop. IV.30 et ses deux preuves](#). En profiter pour relire la définition du polynôme minimal [▷ II.30](#) et réviser ce qu'est un idéal [▷ annexeA§3](#) et notamment l'idéal annulateur d'une matrice [▷ II.32](#).

F • DIAGONALISER & TRIGONALISER :

1. Un vecteur propre n'est pas nul [▷ IV.3](#) et ça peut servir [▷ TD 12.2q1&12.5q3](#), sauf à diviser par 0.
2. Le polynôme caractéristique fournit non seulement le spectre mais aussi un encadrement de la dimension de chaque *sep* [▷ IV.15](#) et ça peut servir [▷ TD 4.6](#). Plus précisément : $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda = \dim C_\lambda$ [▷ IV.37](#).
3. Réviser les critères de diagonalisabilité :
 - deux conditions suffisantes [▷ IV.18 & le théorème spectral ▷ XII.20,21&22](#) ;
 - cinq conditions nécessaires et suffisantes [▷ IV.19&31](#).

Et les critères de trigonalisabilité : deux conditions nécessaires et suffisantes [▷ IV.23&31](#).

4. À noter que :

- polynôme caractéristique de A scindé à racines simples $\implies$ A diagonalisable
 $\iff$
- il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples $\iff$ A diagonalisable
- polynôme minimal de A scindé à racines simples $\iff \mu_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp} A} (X - \lambda) \iff$ A diagonalisable
- polynôme caractéristique de A scindé $\iff$ polynôme minimal de A scindé $\iff$ A trigonalisable

Exercice 9 (Polynômes d'interpolation de Lagrange ▷ [TD 2.11 & V.22](#) et projecteurs spectraux).

Soient un $\mathbb{K}$ -ev E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

- a) On suppose ici que f est diagonalisable et que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont ses $r \leq n$ valeurs propres distinctes deux à deux. Soit, pour chaque $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.

Montrer que $p_i = L_i(f)$ est un projecteur sur la *sep* $E_{\lambda_i}(f)$. Parallèlement à quel *sev*? Quels sont les endomorphismes

$\sum_{i=1}^r p_i$ et $\sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$ et, plus généralement, $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k p_i$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$?

- b) On suppose ici qu'il existe s endomorphismes $f_i \in \mathcal{L}(E)$ et s scalaires $\mu_i \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux tels que :

$\forall k \in \mathbb{N}, f^k = \sum_{i=1}^s \mu_i^k f_i$. Montrer que f est diagonalisable.

- c) On suppose ici que f admet n valeurs propres distinctes deux à deux. On appelle *commutant* de f et on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f . Montrer que, si $g \in C(f)$, alors tout vecteur propre de f est aussi un vecteur propre de g . En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$. Montrer que $C(f)$ est un *sev* de $\mathcal{L}(E)$; quelle est sa dimension? ▷ [II.32](#)

-
5. Certaines relations entre trace, déterminant et valeurs propres peuvent se démontrer sans trigonaliser ▷ [IV.10](#) ou en trigonalisant ▷ [Kdo03/11/2025](#) (où il est question des moments d'une matrice, à rapprocher des moments d'une fonction ▷ [V.24](#) et des moments d'une v.a. ▷ [X.24&25](#)).

G • STABILITÉ (d'un *sev* par un endomorphisme) :

1. Si deux endomorphismes commutent, alors l'image et le noyau ▷ [II.16](#), les *sep* ▷ [IV.35](#) et les sous-espaces caractéristiques ▷ [IV.37](#) de l'un sont stables par l'autre.
2. Si un *sev* F est stable par un endomorphisme u , alors :

- on peut définir l'endomorphisme $u|_F$ induit par u sur F ;
- le polynôme caractéristique de $u|_F$ divise celui de u ▷ [IV.36](#);
- l'endo. $u|_F$ est diagonalisable si u est diagonalisable ▷ [IV.40&41](#);

La diagonalisation simultanée de deux matrices ▷ [Kdo10/11/2025](#), l'unicité de la décomposition de Dunford ▷ [Kdo11/02/2026](#) et l'unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique positive ▷ [TD 12.7](#) en sont des applications. (Il est aussi question de racine carrée d'une matrice dans ▷ [Colle3.1 & DS6*.pb1](#).)

Réviser l'exo ▷ [IV.34](#) qui utilise le théorème de Cayley & Hamilton et qui permet de prouver le théorème ▷ [XII.35&36](#).

3. Si un *sev* F d'un espace euclidien est stable par u , alors son orthogonal $F^\perp$ aussi : c'est vrai si u est une isométrie vectorielle ou un endomorphisme autoadjoint ▷ [XII§4](#) ou plus généralement un endomorphisme normal ▷ [TD 12.11](#).