

CORRIGÉ DU THÈME N° 1

25 février 2026

Exercice 1. 1) Prouver l'un après l'autre les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \ln(n!) &= n \ln n + o(n \ln n) \\
\text{(b)} &= n \ln n - n + o(n) \\
\text{(c)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n) \\
\text{(d)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + o(1) \\
\text{(e)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

où K est un réel. En déduire un équivalent de $n!$ (le même qu'au [▷ DS4*.2q11](#)).2) Déterminer un équivalent, quand n tend vers l'infini, de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\text{sh } k}{\text{ch } k}$. Montrer que la suite des réels $v_n = n - S_n$ converge vers un réel ℓ et déterminer un équivalent de $\ell - v_n$.1) a) La première formule est une réécriture de $\sim$ avec un o :

$$\ln(n!) \sim n \ln n \iff \ln(n!) = n \ln n + o(n \ln n).$$

Or $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où l'équivalent en comparant la série $\sum \ln(n)$ et l'intégrale $\int \ln(x) dx$.b) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln n$ en étudiant la série télescopique $\sum (u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = \ln n - n \ln n + (n-1) \ln(n-1) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -1 \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum (-1)$ diverge, d'où la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ diverge aussi et leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = \ln(n!) - n \ln n \sim \sum_{k=2}^n (-1) = -n + 1 \sim -n.$$

Donc $\ln(n!) = n \ln n - n + o(n)$

c) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln n + n$ en étudiant la série $\sum (u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n} \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, d'où la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ diverge aussi et leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = \ln(n!) - n \ln n + n - 1 \sim \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2} \ln n.$$

Donc $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$

d) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n$ en étudiant la série $\sum (u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge aussi, donc la suite u_n converge. Soit K sa limite.

Alors
$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + o(1)$$

e) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n - K$ en étudiant la série $\sum (u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} \sim -\frac{1}{12n^2} \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où les restes sont équivalents :

$$-u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - u_{k-1}) \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-1}{12k^2} \sim -\frac{1}{12n}$$

en comparant série et intégrale. Donc

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où, en passant à l'exponentielle : $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K \exp \left[\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$. Donc

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K$$

Exercice 1, question 2:

Merci à
Romain Lelaidier

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = th(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ car $e^{-2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ qui ne change pas de signe. D'après le théorème de sommation des équivalents,

$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n 1 = n+1$ d'où $S_n \sim n$.

2) On remarque que $v_n = n - \sum_{k=0}^n th(k) = n - \sum_{k=1}^n th(k) = \sum_{k=1}^n (1 - th(k)) = \sum_{k=1}^n w_k$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 1 - th(n) = 1 - \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = \frac{2e^{-2n}}{1 + e^{-2n}}$.

Comme $e^{-2n} \geq 0$, $0 \leq w_n = \frac{2e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \leq 2e^{-2n}$

Or la série $\sum e^{-2n}$ cv car c'est une série géométrique de raison

$e^{-2} \in]-1, +1[$. D'où la série $\sum w_n$ cv aussi.

Donc la suite (v_n) cv. Soit l sa limite.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = (n+1 - S_{n+1}) - (n - S_n) = 1 + S_n - S_{n+1} = 1 - th(n+1) = w_{n+1} = \frac{2e^{-2(n+1)}}{1 + e^{-2(n+1)}} \sim 2e^{-2(n+1)}$

car $e^{-2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $1 + e^{-2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

donc $v_{n+1} - v_n \sim \frac{2}{e^2} (e^{-2})^n$ qui ne change pas de signe, et est le terme général

d'une série géométrique convergente.

D'après le théorème de sommations des équivalents, $\sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{e^2} (e^{-2})^k$

d'où $l - v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \sim \frac{2}{e^2} \sum_{k=n}^{\infty} (e^{-2})^k \sim \frac{2}{e^2} \left(\frac{e^{-2n}}{1 - e^{-2}} \right) \sim \frac{2}{e^2 - 1} e^{-2n}$

En effet, si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n}{1-q}$

Donc $l - v_n \sim \frac{2}{e^2 - 1} \cdot \frac{1}{e^{2n}}$

$\sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l - v_n$

Téléscope $\Rightarrow$ barrière