

## C O L L E N° 1 8

*Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien*

**Exercice 1.** Soient  $E$  un espace euclidien et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . On dit qu'un endomorphisme  $f$  conserve l'orthogonalité si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x|y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x)|f(y) \rangle = 0.$$

1. On suppose que  $f$  est un endomorphisme conservant l'orthogonalité.
  - (a) Soient  $i$  et  $j$  distincts dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Calculer  $\langle f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j) \rangle$  et en déduire que  $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ .
  - (b) En déduire qu'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x|y \rangle$ .
2. Montrer qu'un endomorphisme  $f$  conserve l'orthogonalité si, et seulement si, il existe un scalaire  $\lambda$  et une isométrie vectorielle  $g$  tels que  $f = \lambda g$ .

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3 et  $f$  un endomorphisme non nul de  $E$ .

Montrer que  $f$  est une rotation si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

**Exercice 3.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . On définit la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. On note  $s = a + b + c$ . Montrer que  $|s| \leq \sqrt{3}$ .
2. Montrer que  $\det(A) = \frac{s}{2}(3 - s^2)$ . En déduire que  $|\det(A)| \leq 1$ .
3. Montrer que :  $|\det(A)| = 1$  si, et seulement si,  $A$  est une matrice orthogonale.