

Chapitre XIV Couples de variables aléatoires discrètes

Table des matières

XIV.1	Lois conjointe et marginales	119
XIV.2	La somme de deux variables aléatoires	120
XIV.3	Espérance & variance d'une somme	121
XIV.4	La loi faible des grands nombres	123

XIV.1 LOIS CONJOINTE ET MARGINALES

PROPOSITION-DÉFINITION 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors l'application

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega), \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

est aussi une *vad* appelée **le couple de vad** (X, Y) .

Preuve — $((X, Y) = (a, b))$, qu'on note aussi $(X = a, Y = b)$, est par définition l'ensemble des résultats ω tels que $(X, Y)(\omega) = (a, b)$. Cet ensemble est donc égal à $(X = a) \cap (Y = b)$, qui est bien un événement car c'est l'intersection des deux événements $(X = a)$ et $(Y = b)$.

En outre, l'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est fini ou dénombrable car inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, qui est fini ou dénombrable (on se souvient que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable). $\square$

La loi de probabilité du couple (X, Y) est appelée **la loi conjointe** :

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad P((X, Y) = (a_i, b_j)) = P(X = a_i, Y = b_j) = P((X = a_i) \cap (Y = b_j)) = p_{ij}$$

où chaque p_{ij} appartient à $[0, 1]$ et $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1$.

Les lois de probabilité de X et de Y sont appelées **les lois marginales**. La loi conjointe permet de retrouver les lois marginales :

$$\begin{cases} \forall i \in I, & P(X = a_i) = \sum_{j \in J} P(X = a_i, Y = b_j) \\ \forall j \in J, & P(Y = b_j) = \sum_{i \in I} P(X = a_i, Y = b_j) \end{cases}$$

Preuve — $\Omega = \bigcup_{j \in J} (Y = b_j)$, d'où : pour chaque $i \in I$, l'événement

$$(X = a_i) = (X = a_i) \cap \Omega = (X = a_i) \cap \bigcup_{j \in J} (Y = b_j) = \bigcup_{j \in J} ((X = a_i) \cap (Y = b_j))$$

est une union disjointe d'événements de probabilités p_{ij} , donc $P(X = a_i) = \sum_{j \in J} p_{ij}$. De même pour $P(Y = b_j)$. $\square$

Mais les lois marginales ne permettent pas toujours de retrouver la loi conjointe. C'est ce que montre l'exercice suivant.

EXERCICE 2 — Une boîte contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire au hasard l'une après l'autre deux boules. Soient les *vad* X et Y définies par : X est égale à 0 si la première boule tirée est blanche, à 1 si elle est noire. De même Y pour la deuxième boule.

Compléter les tableaux suivants dans les deux cas :

1. si le tirage se fait sans remise.

	$Y = 0$	$Y = 1$	
$X = 0$	$p_{00} =$	$p_{01} =$	$P(X = 0) =$
$X = 1$	$p_{10} =$	$p_{11} =$	$P(X = 1) =$
	$P(Y = 0) =$	$P(Y = 1) =$	1

2. si le tirage se fait avec remise.

	$Y = 0$	$Y = 1$	
$X = 0$	$p_{00} =$	$p_{01} =$	$P(X = 0) =$
$X = 1$	$p_{10} =$	$p_{11} =$	$P(X = 1) =$
	$P(Y = 0) =$	$P(Y = 1) =$	1

Pour retrouver la loi du couple (X, Y) à partir des lois de chacune des variables X et Y , on peut faire des hypothèses supplémentaires : supposer par exemple que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

DÉFINITION 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On dit que deux *va* X et Y sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si

$$\forall (a, b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b).$$

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou non) de variables aléatoires. On dit que ces *va* sont :

— **deux à deux indépendantes** si

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies \forall (a, b), \quad P(X_i = a, X_j = b) = P(X_i = a) \cdot P(X_j = b);$$

— **indépendantes** si, pour toute partie finie non vide $J \subset I$,

$$\forall (a_j)_{j \in J}, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j = a_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j = a_j).$$

On admet les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si deux *vad* sont indépendantes, alors :

1. $\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$;
2. pour toutes fonctions φ et ψ , les *vad* $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont aussi indépendantes.
3. (**Lemme des coalitions**) Soient φ et ψ deux fonctions. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des *va* indépendantes, alors $\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \varphi(X_1, \dots, X_p) \perp\!\!\!\perp \psi(X_{p+1}, \dots, X_n)$.

XIV.2 LA SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. La **somme** Z de deux *vard* X et Y est la *vard* définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

La loi conjointe du couple (X, Y) permet de calculer la loi de probabilité de la somme :

$$\forall c \in Z(\Omega), \quad P(Z = c) = \sum_{(i,j) \in K(c)} p_{ij},$$

où $K(c) = \{(i, j) \in I \times J \mid a_i + b_j = c\}$.

Preuve — Pour chaque $c \in Z(\Omega)$, l'événement $(Z = c)$ est la réunion disjointe $\bigcup_{(i,j) \in K(c)} ((X = a_i) \cap (Y = b_j))$. $\square$

EXERCICE 5 — Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes**. Montrer que :

1. (**stabilité de la loi binomiale**) si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, alors

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p).$$

où $n_1 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ a la même valeur pour les deux variables aléatoires. En déduire $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.

2. (**stabilité de la loi de Poisson**) si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, alors

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

où $\lambda_1 \in]0, +\infty[$ et $\lambda_2 \in]0, +\infty[$. En déduire $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.

XIV.3 ESPÉRANCE & VARIANCE D'UNE SOMME

PROPOSITION 6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si deux variables aléatoires X et Y sont d'espérance finie, alors leur somme $X + Y$ est aussi d'espérance finie et :

$$E(X) + E(Y) = E(X + Y)$$

Mieux : pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha X + \beta Y$ est d'espérance finie et

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

Autrement dit : l'espérance est linéaire.

PROPOSITION-DÉFINITION 7

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de **vard**. Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

où $\text{Cov}(X, Y)$ est appelé la **covariance** de (X, Y) et est défini par

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

REMARQUE 8 — 1. $\text{Cov}(X, X) = V(X)$.

Preuve — $\text{Cov}(X, X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$ est donc égal à la variance de X . $\square$

2. La covariance est une forme :

$\boxed{S}$ symétrique car $\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(Y \cdot X) - E(Y) \cdot E(X) = \text{Cov}(Y, X)$.

$\boxed{B}$ bilinéaire car l'espérance est linéaire : $E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2)$ et $E((\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)Y) = \alpha_1 E(X_1 Y) + \alpha_2 E(X_2 Y)$, d'où $\text{Cov}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y) = E((\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \cdot Y) - E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \cdot E(Y) = \alpha_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \alpha_2 \text{Cov}(X_2, Y)$. La covariance est donc linéaire à gauche, et aussi à droite par symétrie.

$\boxed{P}$ positive car $\text{Cov}(X, X) = E[(X - E(X))^2]$ et la **vard** $(X - E(X))^2$ est à valeurs positives, donc son espérance aussi.

$\boxed{D}$ non définie car : si la **vard** est constante (et pas forcément nulle), alors $V(X) = 0$. Donc $V(X) = 0 \not\Rightarrow X = 0$.

PROPOSITION 9

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de **vard**. Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2) \quad \text{et} \quad [\text{Cov}(X, Y)]^2 \leq V(X) \cdot V(Y).$$

Preuve — $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Cov}(X, X)} \cdot \sqrt{\text{Cov}(Y, Y)}$. C'est une inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\boxed{B} \boxed{S} \boxed{P}$ suffisent à rendre vraie l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De même pour $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}$. $\square$

DÉFINITION 10

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de *vard* tel que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie. On dit que X et Y ne sont pas corrélées si $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

THÉORÈME 11

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de *vard* telles que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \iff \text{Cov}(X, Y) = 0 \iff V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

L'exercice suivant montre que la réciproque de ce théorème est fautive :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies X \text{ et } Y \text{ non corrélées}$$

EXERCICE 12 — Soit X une variable aléatoire qui prend, de manière équiprobable, les 3 valeurs $-1, 0$ et $+1$. Soit $Y = |X|$.

1. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

COROLLAIRE 13

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des *vard* indépendantes deux à deux, alors la variance de la somme est égale à la somme des variances :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Preuve — $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{k=1}^n X_k\right)$ d'où, par bilinéarité de la covariance :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + \sum_{i \neq j} \underbrace{\text{Cov}(X_i, X_j)}_{=0}.$$

La covariance de chaque couple (X_i, X_j) est nulle si $i \neq j$ à cause de l'hypothèse d'indépendance deux à deux. $\square$

PROPOSITION 14

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soient G_X , G_Y et G_{X+Y} les fonctions génératrices des variables aléatoires X , Y et $X+Y$. Si X et Y sont **indépendantes**, alors

$$\forall t \in [-1, +1], \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

Preuve — Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_k = P(X = k)$ et $q_{n-k} = P(Y = n - k)$.

Alors $P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}$ car :

- l'événement $(X + Y = n)$ est la réunion disjointe des événements $(X = k) \cap (Y = n - k)$, sa probabilité est donc la somme des probabilités $P((X = k) \cap (Y = n - k))$;
- chaque probabilité $P((X = k) \cap (Y = n - k))$ est égale au produit $p_k q_{n-k}$ car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, par hypothèse.

D'où $P(X + Y = n)t^n = \sum_{k=0}^n p_k t^k q_{n-k} t^{n-k}$. La série $\sum P(X + Y = n)t^n$ est donc le produit de Cauchy des deux séries $\sum p_n t^n$ et $\sum q_n t^n$. Or ces deux séries sont absolument convergentes pour tout $t \in [-1, +1]$. Donc

$$\forall t \in [-1, +1], \quad \sum_{n=0}^{\infty} P(X + Y = n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n.$$

□

EXERCICE 15 — Refaire l'exercice 5 en utilisant la proposition précédente.

XIV.4 LA LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

THÉORÈME 16 (loi faible des grands nombres)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient (X_k) une suite de variables aléatoires discrètes et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Si les variables aléatoires X_k sont deux à deux indépendantes et si elles ont la même espérance μ et la même variance σ^2 , alors

$$\forall a > 0, \quad P(|Z_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Preuve — L'espérance de Z_n est $E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$ car l'espérance est linéaire. D'où $E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu = \mu$.

La variance de Z_n est $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$. Or les variables aléatoires X_k sont deux à deux indépendantes, d'où $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$. Donc $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall a > 0, \quad P(|Z_n - E(Z_n)| \geq a) \leq \frac{V(Z_n)}{a^2}.$$

□

EXEMPLE 17 — On répète une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire une expérience aléatoire qui peut donner deux résultats : un succès avec la probabilité p ou un échec avec la probabilité $q = 1 - p$. Soit Z_n la **fréquence** des succès après n épreuves :

$$\forall a > 0, \quad P(|Z_n - p| \geq a) \leq \frac{pq}{na^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Preuve — Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, soit X_k la variable aléatoire définie par : $X_k = 1$ si le résultat de la k -ième épreuve est un succès et $X_k = 0$ si c'est un échec. Alors le nombre de succès après n épreuves est $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et la fréquence des succès est $Z_n = \frac{1}{n} S_n$. Supposons que les résultats de chaque épreuve sont indépendants deux à deux. D'après la loi faible des grands nombres,

$$\forall a > 0, \quad P(|Z_n - p| \geq a) \leq \frac{pq}{na^2} \leq \frac{1}{4na^2}$$

car $X_k \sim \mathcal{B}(1, p)$, d'où : $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = pq$.

□

Donc la probabilité que « la fréquence Z_n des succès s'écarte de la probabilité p » tend vers 0 quand le nombre n d'épreuves de Bernoulli tend vers ∞ .

