

Colle 18 Endomorphismes d'un espace euclidien

FREYCON Céleste

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul et m un entier naturel. On munit $\mathbb{R}^m$ du produit scalaire euclidien canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A dans la base canonique et $f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice tA dans la base canonique.

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^m$ est de type n (n entier supérieur ou égal à -1) si et seulement si $f^n = f^*$ (où f^* désigne l'adjoint de f).

1. Rappeler la définition et les propriétés de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien et donner des exemples d'endomorphismes f de $\mathbb{R}^m$ de type -1, 0 et 1.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ de type n où n un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé.
 - (a) déterminer $f^{(n^2)}$ en fonction de f .
 - (b) On pose $g = f^{n+1}$. Montrer que les seules valeurs propres possibles de g sont 0 et 1 puis montrer que g est un projecteur orthogonal.
 - (c) Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires orthogonaux et que la restriction de f à son image est une isométrie.

Solution 1.

1. le type 0 ne concerne que l'identité de $\mathbb{R}^m$, le type -1 concerne les endomorphismes orthogonaux, le type 1 concerne les endomorphismes symétriques.

2. (a) $f^{(n^2)} = (f^n)^n = (f^*)^n = (f^n)^* = (f^*)^* = f$

(b) $g^n = f^{n^2+n} = f \circ f^* = f^* \circ f = f^{n+1} = g$ donc $X^n - X$ est un polynôme annulateur de g . Ainsi, dans un premier temps, on peut dire que $Sp(g) \subset \{0, 1, -1\}$ et que g a au moins une valeur propre réelle car c'est un endomorphisme symétrique ; mais si -1 est une valeur propre de g et x un vecteur propre associé alors, d'une part $\langle g(x), x \rangle = \langle f^* \circ f, x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2$ et, d'autre part, $\langle g(x), x \rangle = -\|x\|^2$. x étant non nul, on conclut à une impossibilité. Ainsi $Sp(g) \subset \{0, 1\}$. Il n'y a donc que 3 cas :

- si $Sp(g) = \{0\}$ alors g qui est diagonalisable est donc égal à l'endomorphisme nul ,
- si $Sp(g) = \{1\}$ alors g est l'identité.
- si $Sp(g) = \{0, 1\}$ alors g , qui est symétrique, vérifie

$$E_0(g) \oplus^\perp E_1(g) = \mathbb{R}^m$$

donc, pour tout x de $\mathbb{R}^m$, qui se décompose en $y + z$ avec $y \in E_0$ et $z \in E_1$, on a $g^2(x) = g^2(y) = y = g(x)$ donc g est le projecteur sur $\text{img} = E_1(g)$ dans la direction de $\ker g = E_0(g)$ qui sont orthogonaux.

Dans les 3 cas g est un projecteur orthogonal.

(c) on a bien sûr $\ker f \subset \ker g$, réciproquement, si $x \in \ker g$ alors $\langle f^* \circ f(x), x \rangle = 0$ donc $\|f(x)\| = 0$ donc $x \in \ker f$. Ainsi $\ker f = \ker g$ et puisque l'on a $\text{img} = \text{im} f \circ f^* \subset \text{im} f$ on obtient, avec le théorème du rang, $\text{im} f = \text{img}$. Ainsi $\ker f$ et $\text{im} f$ sont bien supplémentaires orthogonaux. Enfin, si $x \in \text{im} f$, alors $x \in \text{img}$ c'est à dire $x \in E_1(g)$ donc $f^* \circ f(x) = x$ et $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, g(x) \rangle = \|x\|^2$ donc

$$\|f(x)\| = \|x\|.$$

CASSIN Naoelle

Exercice 2. *Le Critère de Sylvester* Soit $n \geq 1$. Pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\Delta_k(A)$ le déterminant de la sous-matrice extraite constituée des k premières lignes et k premières colonnes.

1. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive. Montrer que pour tout k , la matrice extraite A_k est définie positive.
 (b) En déduire que $\Delta_k(A) > 0$ pour tout k .
2. On veut montrer la réciproque : si A symétrique telle que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\det A_k > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 On procède par récurrence sur n .
 (a) Vérifier la propriété pour $n = 1$.
 (b) Soit $n \geq 2$. On suppose la propriété vraie au rang $n-1$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k, \Delta_k(A) > 0$.
 On décompose A par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^\top & \alpha \end{pmatrix}$$

où $A_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i. Justifier que A_{n-1} est inversible.
- ii. On cherche une matrice Q de la forme $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. Déterminer le vecteur V pour que le bloc non-diagonal de la matrice produit AQ soit nul (c'est-à-dire $A_{n-1}V + C = 0$).
- iii. Calculer le produit matriciel $D = Q^\top A Q$ avec le vecteur V trouvé précédemment. Montrer que D est diagonale par blocs de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

où δ est un réel (le complément de Schur) que l'on exprimera en fonction de α, C et A_{n-1}^{-1} .

- iv. Exprimer $\det(D)$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(Q)$. En déduire que $\delta > 0$.
- v. Conclure que A est définie positive.

Solution 2.

1. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul. On construit le vecteur $\tilde{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en complétant X par des zéros :

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $X \neq 0$, on a $\tilde{X} \neq 0$. Puisque A est définie positive, on a $\tilde{X}^\top A \tilde{X} > 0$. Or, en décomposant A par blocs selon les tailles k et $n-k$, on a :

$$\tilde{X}^\top A \tilde{X} = (X^\top \quad 0) \begin{pmatrix} A_k & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = X^\top A_k X$$

On en déduit que $X^\top A_k X > 0$ pour tout $X \neq 0$. Ainsi, A_k est définie positive.

(b) D'après la question précédente, $A_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$, donc diagonalisables et ses valeurs propres sont strictement positives. Par conséquent, $\Delta_k(A) > 0$.

2. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.

(a) **Initialisation** ($n = 1$) : Soit $A = (a_{1,1}) \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$. On suppose $\Delta_1(A) > 0$, c'est-à-dire $a_{1,1} > 0$. Pour tout $X = (x) \in \mathbb{R}^*$, on a $X^\top A X = a_{1,1} x^2 > 0$. Donc $A \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

(b) **Hérédité** ($n \geq 2$) : On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Delta_k(A) > 0$. On décompose A par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^\top & \alpha \end{pmatrix}$$

i. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $A_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$. Ses valeurs propres étant strictement positives, 0 n'est pas valeur propre, donc A_{n-1} est inversible.

ii. Soit $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons le produit AQ :

$$AQ = \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1}V + C \\ C^\top & C^\top V + \alpha \end{pmatrix}$$

Comme A_{n-1} est inversible, on a . , on trouve de manière unique :

$$A_{n-1}V + C = 0 \iff V = -A_{n-1}^{-1}C$$

iii. Calculons maintenant $D = Q^\top A Q$:

$$D = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ C^\top & C^\top V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ V^\top A_{n-1} + C^\top & C^\top V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

car

$$V^\top A_{n-1} = (-A_{n-1}^{-1}C)^\top A_{n-1} = -C^\top (A_{n-1}^{-1})^\top A_{n-1} = -C^\top A_{n-1}^{-1} A_{n-1} = -C^\top$$

iv. On a $D = Q^\top A Q$. Le déterminant est multiplicatif, donc :

$$\det(D) = \det(Q^\top) \det(A) \det(Q) = \det(Q)^2 \det(A)$$

Or, Q est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc $\det(Q) = 1$. Il s'ensuit que $\det(D) = \det(A)$. Par ailleurs, D étant diagonale par blocs, $\det(D) = \det(A_{n-1}) \times \delta$. On a donc :

$$\delta \det(A_{n-1}) = \det(A) \implies \delta = \frac{\det(A)}{\det(A_{n-1})} = \frac{\Delta_n(A)}{\Delta_{n-1}(A)}$$

Par hypothèse, $\Delta_n(A) > 0$ et $\Delta_{n-1}(A) > 0$. On en déduit rigoureusement que $\delta > 0$.

v. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur quelconque. On pose $Y = Q^{-1}X$, que l'on décompose en $Y = \begin{pmatrix} Y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$. On a $X = QY$. Évaluons la forme quadratique associée à A :

$$X^\top A X = (QY)^\top A (QY) = Y^\top (Q^\top A Q) Y = Y^\top D Y$$

Grâce à la forme diagonale par blocs de D , cela se simplifie en :

$$X^\top A X = Y_{n-1}^\top A_{n-1} Y_{n-1} + \delta y_n^2$$

D'après l'hypothèse de récurrence, A_{n-1} est définie positive, donc $Y_{n-1}^\top A_{n-1} Y_{n-1} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $Y_{n-1} = 0$. De plus, comme $\delta > 0$, on a $\delta y_n^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $y_n = 0$. Par somme, $X^\top A X \geq 0$. Si $X^\top A X = 0$, alors on a nécessairement $Y_{n-1} = 0$ et $y_n = 0$, d'où $Y = 0$. Comme Q est inversible, $X = QY = 0$. La matrice A est donc définie positive. Le critère est démontré pour tout n .

MOREAU-HERILLARD Oscar

Exercice 3. (SR) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques. Si -1 n'appartient pas au spectre de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(B) = (I_n - B)(I_n + B)^{-1}$.

1. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que -1 n'est pas valeur propre de A .
2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A)$ est dans $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ et que -1 n'est pas valeur propre de $f(A)$.
3. Examiner la réciproque de la propriété démontrée dans la question précédente.
4. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $f(f(A))$? Que peut-on en déduire?
5. Expliciter $f(A)$ pour $n = 2$.
6. Déduire de ce qui précède le théorème de réduction des matrices antisymétriques pour n pair.

Solution 3.

1. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et X un vecteur propre de $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X^T A X = \lambda \|X\|^2 = (X^T A X)^T = -X^T A X = -\lambda \|X\|^2$, absurde donc 0 est la seule valeur propre réelle de A .
2. On a

$$\begin{aligned} f(A)^T f(A) &= (I_n + A)^{-1T} (I_n - A)^T (I_n - A) (I_n + A)^{-1} \\ &= (I_n - A)^{-1} (I_n + A) (I_n - A) (I_n + A)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme $(I_n + A)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)$:

$$f(A)^T f(A) = (I_n - A)^{-1} (I_n - A) (I_n + A) (I_n + A)^{-1} = I_n.$$

Donc $f(A) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.

Si X est vecteur propre de $f(A)$ associé à -1 , alors $f(A)X = -X$, en multipliant par $f(A)^T$ à gauche on obtient : $X = -(I_n - A)^{-1} (I_n + A) X$ d'où : $(I_n - A)X = -(I_n + A)X$ soit : $2X = 0$ absurde donc -1 n'est pas valeur propre de $f(A)$.

On a alors :

$$f(A) \sim \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R(\theta_r) & & 0 \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $\det(f(A)) = 1$, puis $f(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

3. Si $f(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ alors,

$$I_n = (I_n + A^T)^{-1} (I_n - A^T) (I_n - A) (I_n + A)^{-1}.$$

Puis

$$(I_n + A^T) (I_n + A) = (I_n - A^T) (I_n - A)$$

d'où : $I_n + A^T + A + A^T A = I_n - A^T - A + A^T A$ donc $A^T = -A$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

4. On a

$$\begin{aligned}
f(f(A)) &= (I_n - f(A))(I_n + f(A))^{-1} \\
&= (I_n - (I_n - A)(I_n + A)^{-1})(I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1})^{-1} \\
&= ((I_n + A) - (I_n - A))(I_n + A)^{-1} [(I_n + A) - (I_n - A)(I_n + A)^{-1}]^{-1} \\
&= 4A
\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{1}{2}f$ est une symétrie sur l'espace des symétrique antisymétrique.

5. Si -1 n'est pas valeur propre de A et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors :

$$\begin{aligned}
f(A) &= \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \frac{1}{(1+a)(1+d)-bc} \begin{pmatrix} 1+d & -b \\ -c & 1+a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(1+a)(1+d)-bc} \begin{pmatrix} (1-a)(1+d)+bc & -2b \\ -2c & (1-d)(1+a)+bc \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors d'après la question 4, $A = \frac{1}{4}f(f(A))$ avec $f(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$. Donc il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, telle que

$$f(A) = P \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R(\theta_r) & & 0 \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PRP^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4} (I_n - PRP^{-1}) (I_n + PRP^{-1})^{-1} = \frac{1}{4} P (I_n - R) P^{-1} (P(I_n + R)P^{-1})^{-1} \\
&= \frac{1}{4} P f(R) P^{-1} \\
&= \frac{1}{4} P \begin{pmatrix} f(R(\theta_1)) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & f(R(\theta_r)) & & 0 \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $f(R(\theta)) = \frac{1}{(1+\cos(\theta))} \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = S(\theta)$.

$$\text{Finalement, } A \sim \frac{1}{4} \begin{pmatrix} S(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & S(\theta_r) & & 0 \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Chkir Neyla

Exercice 4. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres rangées par **ordre décroissant**. Soit également $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés, i.e. $f(e_k) = \lambda_k e_k$. On désigne par V_k le sous-espace $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, par W_k le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ et par $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \in \{1, \dots, n\}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non-nul,

$$R_A(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

1. Montrer que $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} R_A(x)$ et que $\lambda_n = \max_{x \neq 0} R_A(x)$.
2. Montrer que $\max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_k$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k . Vérifier que $V \cap W_k \neq \{0\}$.
4. En déduire que $\max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k$.
5. En déduire **le théorème de Courant-Fischer** :

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x).$$

Solution 4. 1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul qu'on décompose dans la base orthonormale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. On a donc

$$Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n.$$

Il vient

$$\langle Ax, x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

En utilisant $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, on a

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

On en déduit que $R_A(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$. Deplus, $R_A(e_1) = \lambda_1$ et $R_A(e_n) = \lambda_n$. Ceci prouve le résultat demandé.

2. Pour $x = e_k \in V_k$, on a $R_A(x) = \lambda_k$, d'où le résultat voulu.

3. Si $V \cap W_k$ était réduit à $\{0\}$, on aurait $\dim(V + W_k) = \dim(V) + \dim(W_k) = k + (n - k + 1) = n + 1 > n$, une contradiction.

4. Pour tout $x \in W_k$, $x \neq 0$, on a $R_A(x) \geq \lambda_k$. Ceci se prouve exactement comme à la question 1. En écrivant $x = x_k e_k + \dots + x_n e_n$, et en remarquant que

$$\lambda_i \geq \lambda_k \text{ pour } i \in \{k, \dots, n\}.$$

5. La question 2 nous dit que

$$\min_{V \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \leq \max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x) \leq \lambda_k.$$

D'autre part, la question 4 nous dit que, pour tout $V \in \mathcal{F}_k$, on a

$$\max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k.$$

D'où le théorème de Courant-Fischer.