

D.S. N° 6 DE MATHÉMATIQUES

Cet énoncé comporte un exercice et deux problèmes.

11 EXERCICE

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues du segment $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. On note T l'endomorphisme défini sur E par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right).$$

- 1) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ définies ci-dessous sont-elles équivalentes ?
- 2) Déterminer $\text{Ker}(T)$.
- 3) Soit $g \in \text{Im}(T)$. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est dérivable en 0. Déterminer $\text{Im}(T)$.
- 4) On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Montrer que l'application T est continue et déterminer $\|T\|_\infty$.

- 5) On munit E de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

Montrer que : $\forall f \in E, \|T(f)\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_2$.

- 6) On pose, pour chaque $n \geq 2$, la fonction f_n affine par morceaux définie par :

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right) = f_n(1) = 0 \quad \text{et} \quad f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

En admettant que $\int_0^1 (f_n(x))^2 dx = \frac{n+1}{3n^2}$ et que $\int_0^1 (T(f_n)(x))^2 dx = \frac{10n^5 + 4n^3 + 10n^2 + 4}{15n^6}$, déterminer $\|T\|_2$.

25

PROBLÈME 1

5

Une première approximation de $\sqrt{2}$.

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n.$$

- 2) Montrer que la série $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge et déterminer sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$.
 3) Montrer que $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
- Handwritten notes:*
 $b_n \sim$
 $b_n \sim$
 note TDA
 plus rapide d'Alfred

4,5

La suite de Héron d'Alexandrie.

- 4) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, si $x > 0$, alors $\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{a}$.
 5) On pose

$$c_0(a) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right).$$

Montrer que la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

- 6) Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.
 7) Calculer $c_1(2)$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}.$$

- 8) En déduire que

$$\sqrt{2} = c_n(2) + O_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right).$$

Cette approximation de $\sqrt{2}$ est-elle plus ou moins précise que celle obtenue à la question 3?

3,5

Racines carrées d'une matrice.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ est une racine carrée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ si $B^2 = A$.

- 9) Montrer que la matrice I_2 possède une infinité de racines carrées.
 10) La matrice $-I_2$ possède-t-elle une racine carrée?
 11) Montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.
 12) Soit $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Montrer que, si N est nilpotente, alors $N^q = 0$ et en déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$.

4 Racines carrées d'une matrice diagonalisable.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^{-1}$$

et que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ (non nécessairement distinctes deux à deux) sont positives.

2 13) On pose

$$M_0 = I_q \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2} (M_n + A M_n^{-1}).$$

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^{-1}.$$

2 14) En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une racine carrée de A .
1 $\operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) \text{ CV}$
1 $M_n \rightarrow P M P^{-1} \text{ est } C^\circ$.

8 Racines carrées d'une matrice trigonalisable.

On suppose que la matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ est trigonalisable et que ses r valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_r$ (distinctes deux à deux et de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$) sont strictement positives.

2 15) Montrer qu'il existe deux matrices A et N telles que :

$$M = A + N,$$

A est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(M)$,

N est nilpotente et $AN = NA$.

(On rappelle que les sous-espaces caractéristiques d'une matrice trigonalisable sont supplémentaires.)

1 16) Montrer que la matrice A est inversible et que les matrices A^{-1} et N commutent.

2 17) En déduire une racine carrée de la matrice $I_q + A^{-1}N$.
1 $A^{-1}N$ nilpotente car 1 Γ diag $q+2$

2 18) Montrer que la matrice A possède une racine carrée B qui commute avec $A^{-1}N$.

1 19) En déduire une racine carrée de la matrice M .

14

PROBLÈME 2

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire S_n qui suit une loi de Poisson de paramètre n : $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbf{P}(S_n = k) = e^{-n} \frac{n^k}{k!}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_n(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}$.

1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau des variations de la fonction f_n .

1 b) Déterminer un équivalent de $f_n(n)$ quand n tend vers ∞ .

2) 1 a) Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance de la variable aléatoire S_n et déterminer celles de la variable aléatoire $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

2,5 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n (n-k) e^{-n} \frac{n^k}{k!}$ et en déduire que : $\mathbf{E}(|S_n - n|) = 2e^{-n} \frac{n^{n+1}}{n!}$.

0,5 c) Étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|S_n^*|)$.

3) 1 a) Rappeler l'hypothèse et l'expression du reste $R_n(a, b)$ de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + R_n(a, b)$$

pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$.

2 b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt.$$

évt $(S_n^* \leq 0) = \bigcup_{k=0}^n \text{disjointe}$
 $P(S_n^* \leq 0) = \sum_{k=0}^n$
 FTRY

1 c) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1 d) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leq 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n .

1 a) Montrer que la fonction $\mathbf{G}_{S_n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1 b) En déduire que, pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t\sqrt{n}}.$$

1 c) Étudier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*})$.