ANALYSE : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qui est un ouvert, donc : si la fonction f possède un extremum local en (x,y), alors le point (x,y) est un point critique.

Exercice n° 8 :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Hyp

1) Déterminons les points critiques de f.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3y - 9 = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

α

$$\iff \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$(0,3)$ est ~~un~~ donc l'unique point critique de f.

$$f(0,3) = 9 - 18 = -9$$

SYNTHÈSE :

$$f(0+h, 3+k) = h^2 + h(3+k) + (3+k)^2 - 3h - 6\times(3+h)$$

$$= -9 + h^2 + hk + k^2$$

$$= -9 + \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geq -9.$$

Donc -9 est un minimum et il est global.

Hyp

2) La fonction $\ln$ est ~~définie~~ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par conséquent

ANALYSE : la fonction f est ~~définie~~ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui est un ouvert.

Déterminons ses points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln^2 x + x \times \frac{2}{x} \ln x + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln^2 x + 2\ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{car } x > 0)$$

$$\iff \begin{cases} \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = e^{-2} \\ y = 0 \end{cases}$$

La fonction f possède donc 2 points critiques, $(1, 0)$ et $(e^{-2}, 0)$

$$f(1,0) = 0$$
$$f(e^{-2}, 0) = e^{-2} \times (-2)^2 = 4e^{-2}$$

SYNTHÈSE :

$f(1,0) = 0$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x,y) \geqslant 0$.

Donc 0 est un minimum et il est global.

$$f(e^{-2}+h, 0+k) = (e^{-2}+h) \cdot \left[\ln^2(e^{-2}+h) + k^2\right]$$
$$= (e^{-2}+h)\left\{\left[-2 + \ln(1+he^{2})\right]^2 + k^2\right\}$$

$$= (e^{-2}+h)\left\{+4-4\ln(1+he^2)+\ln^2(1+he^2)+k^2\right\}$$

$$= 4e^{-2}+0h+0k-3e^2h^2+e^{-2}k^2+hk^2+o(h^2).$$

D'où

$f(e^{-2}+0, 0+k) = 4e^{-2}+k^2 > 4e^{-2}$, $\forall k \neq 0$, donc

$4e^{-2}$ n'est pas un maximum local.

Et $f(e^{-2}+h, 0+0) = 4e^{-2}-3e^2h^2+o(h^2)$

$< 4e^{-2}$ si $h \neq 0$ est assez petit,

donc $4e^{-2}$ n'est pas un minimum local.

Il n'y a donc pas d'extremum local en $(e^{-2}, 0)$.