

Compacité

Exercice 1 ★

Soit a une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - a_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 2 ★

Soient K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé E . Montrer que $K + L$ est un compact de E .

Exercice 3 ★★★

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Montrer que E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Exercice 4 ★★★★★

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$). Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux, i.e. il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PBP^{-1}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $b_{i,i} = b_{i+1,i+1}$. (On pourra commencer par traiter le cas où $n = 2$.)

Exercice 5 ★★★★★

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\{a\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f admet un extrémum global.

Exercice 6 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

- 1) Soit A une partie non vide de E . Montrer que l'application $x \mapsto \inf_{a \in A} \|x - a\|$ est continue sur E .
- 2) Soit K un compact non vide de E inclus dans un ouvert U . Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in K, B_x(r) \subset U.$$

Exercice 7 ★★★

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient K un compact de E et $f : K \rightarrow F$ une application continue injective. On pose $L = f(K)$. Montrer que $f^{-1} : L \rightarrow K$ est continue.

Exercice 8 ★★★

Soit A une partie bornée non vide d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie E .

- 1) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A .
- 2) On suppose l'espace E euclidien, montrer l'unicité de la boule précédente.

Exercice 9 ★★★

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E .

On fixe un vecteur x de E et un réel r tel que $0 < r < \|x\|$. On note K la boule fermée de centre x et de rayon r et on suppose que $f(K) \subset K$.

- 1) Soit $a \in K$ et (a_n) la suite définie par $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$. Justifier que pour tout entier n , $a_n \in K$ et que la suite $f(a_n) - a_n$ converge vers 0_E .

- 2) En déduire que 1 est une valeur propre de f puis que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), |\lambda| \leq 1.$$

- 3) À l'aide d'un exemple choisi en dimension 3, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

- 4) Dans cette question, K ne désigne plus une boule fermée mais l'ellipsoïde

$$K = \left\{ x e_1 + y e_2 + z e_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

où (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E et a, b, c des réels strictement positifs.

On suppose $f(K) = K$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de f .

Exercice 10 ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on écrit $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout indice i .

Soit $S = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 0 \leq x \text{ et } \lambda x \leq Ax\}$.

- 1) Soit $\lambda \in S$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 \leq x$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ et $\lambda x \leq Ax$.
- 2) Soit λ une valeur propre complexe de A . Montrer que $|\lambda| \in S$.
- 3) Déterminer un majorant de S .
- 4) Montrer que S est compacte.
- 5) Soit $\alpha = \max(S)$. Montrer que α est une valeur propre de A strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.

Exercice 11 ★★★

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts recouvrant le compact K :

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Le but de cet exercice est de prouver que l'on peut extraire de cette famille d'ouverts un sous-recouvrement fini.

- 1) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \exists i \in I, B(x, \alpha) \subset U_i.$$

- 2) Établir qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \alpha).$$

- 3) En déduire que l'on peut extraire de la famille $(U_i)_{i \in I}$ une sous-famille finie recouvrant K .