

Compacité

Exercice 1 ★

On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a . Montrons que A est convexe.

Soient $(\alpha, \beta) \in A^2$ avec $\alpha < \beta$. Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, $|a_{p+1} - a_p| \leq \varepsilon_n$.

On souhaite prouver que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \exists \varphi(n) \in \mathbb{N}, \begin{cases} \varphi(n) > q \\ a_{\varphi(n)} < \gamma \leq a_{\varphi(n+1)} \end{cases}.$$

En effet dans ce cas, $|a_{\varphi(n)} - \gamma| \leq \frac{1}{n}$ et on aura défini une sous-suite (en choisissant pour tout n , $\varphi(n+1) > \varphi(n)$) de a de limite γ .

Supposons que ce ne soit pas le cas :

$$\exists q \in \mathbb{N}, \forall k > q, \gamma \notin [a_k, a_{k+1}].$$

Soit $q \in \mathbb{N}$ un tel entier.

Puisque α est une valeur d'adhérence de a , il existe un entier $p > \max(N, q)$ tel que $a_p < \gamma$. De même, β étant une valeur d'adhérence de a , il existe un entier $r > \max(N, q)$ tel que $a_r > \gamma$.

L'ensemble $\{k \in \llbracket p, r \rrbracket \mid a_k < \gamma\}$ est non vide ($p \in E$) et majoré (par r), donc a un plus grand élément k qui vérifie $a_k < \gamma$ (car $k \in E$) et $a_{k+1} \geq \gamma$ (car $k+1 \notin E$ et $k+1 \leq r$), une contradiction puisque $k \geq p > q$.

Exercice 2 ★

Soit u une suite de $K + L$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n \in K$ et $w_n \in L$. Comme K est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(v_{\varphi(n)})$ converge dans K . Comme $(w_{\varphi(n)})$ est une suite du compact L , il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $w_{\varphi(\psi(n))}$ converge dans L . Comme $(v_{\varphi(\psi(n))})$ est une sous-suite de $(v_{\varphi(n)})$, elle converge.

Par suite, $u_{\varphi(\psi(n))}$ est une sous-suite de u qui converge dans $K + L$.

Donc $K + L$ est compact.

Exercice 3 ★★★

On suppose dans un premier temps E de dimension finie. On sait alors que toute partie fermée bornée est compacte, ce qui est le cas de la boule unité fermée.

On suppose à présent que la boule unité fermée est compacte et E de dimension infinie. On forme alors une suite de vecteurs (u_n) telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, d(u_{n+1}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)) = 1$.

En effet, il suffit de choisir pour u_0 n'importe quel vecteur de norme 1, et si $u_0, \dots, u_n$ ont déjà été construits, on choisit $x \in E \setminus \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)$ (ce qui est possible car E est de dimension infinie), un tel vecteur vérifie donc $d(x, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)) > 0$ et on pose $u_{n+1} = \frac{x-y}{\delta}$ où $\delta = d(x, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n))$ et $y \in \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)$ un vecteur tel que $\delta = \|x - y\|$:

- le vecteur y existe : il existe une suite (y_p) de $\text{Vect}(u_0, \dots, u_n)$ tel que $\delta = \lim \|x - y_p\|$; cette suite est bornée dans le fermé $\text{Vect}(u_0, \dots, u_n)$ donc elle admet une sous-suite convergente, la limite d'une telle sous-suite fournit le vecteur y ,

- $d(u_{n+1}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)) = d\left(\frac{x}{\delta}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)\right)$ car $\frac{y}{\delta} \in \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)$, et $d\left(\frac{x}{\delta}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)\right) = \frac{1}{\delta}d(x, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)) = 1$.

Comme la boule unité fermée est supposée compacte, on peut extraire de u une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente. Donc $(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)})$ est de limite nulle, or, φ étant strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geq d(u_{\varphi(n+1)}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_{\varphi(n+1)-1})) = 1$, une contradiction.

Exercice 4 ★★

- Comme indiqué dans l'énoncé, commençons par traiter le cas où $n = 2$. Soit donc $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)a + \sin(\theta)b & \cos(\theta)c + \sin(\theta)d \\ -\sin(\theta)a + \cos(\theta)b & -\sin(\theta)c + \cos(\theta)d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos^2(\theta) + (b+c) \sin(\theta) \cos(\theta) + d \sin^2(\theta) & * \\ * & d \cos^2(\theta) - (b+c) \cos(\theta) \sin(\theta) + a \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ de sorte que $(a-d)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2(b+c) \cos(\theta) \sin(\theta) = 0$, i.e. $(a-d) \cos(2\theta) + (b+c) \sin(2\theta) = 0$: cela revient à trouver un vecteur unitaire orthogonal (dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle) à $(a-d, b+c)$, ce qui est bien sûr possible.

- On se place dans le cas général. Soit $f : P \in O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \delta(P^{-1}AP)$ où $\delta : (m_{i,j}) \in M_2(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} |m_{i+1,i+1} - m_{i,i}|$. La fonction f est continue sur le compact $O_n(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Elle admet donc un minimum $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\varphi(P) = 0$. On suppose pour cela $\varphi(P) > 0$: soit alors $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $b_{k+1,k+1} \neq b_{k,k}$ où $B = P^{-1}AP$. On note $C = \begin{pmatrix} b_{k,k} & b_{k,k+1} \\ b_{k+1,k} & b_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$. D'après la première partie, il existe $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}CQ$ ait des coefficients diagonaux égaux. On pose R la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$. On remarque que $R \in O_n(\mathbb{R})$ et $\delta(R^{-1}BR) < \delta(B)$ et donc, comme $PR \in O_n(\mathbb{R})$, $\varphi(PR) < \varphi(P)$: une contradiction.

Exercice 5 ★★

On pose $a = f(0)$ et $K = f^{-1}\{a\}$. Puisque K est compacte, K est bornée : soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $K \subset B_0(M)$ où $B_0(M)$ est la boule de centre 0 et de rayon M (pour la norme infinie par exemple). Étant donnés deux vecteurs en dehors de cette boule fermée, on peut trouver un chemin continu d'extrémités ces deux vecteurs tracé sur le complémentaire de $B_0(M)$ car $n \geq 2$. On en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que pour tout $x \notin B_0(M)$, $f(x) > a$ ou que pour tout $x \notin B_0(M)$, $f(x) < a$.

Supposons que pour tout $x \notin B_0(M)$, $f(x) > a$. La boule $B_0(M)$ est fermée et bornée, en dimension finie, donc compacte. On en déduit que f admet dans $B_0(M)$ un minimum b . Comme $K \subset B_0(M)$, $b \leq a$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq b$. Donc f a un minimum global.

On démontre de même que si $f(x) < a$ pour tout $x \notin B_0(M)$, alors f admet un maximum global.

Exercice 6 ★★

- 1) On note f cette application. Elle est bien définie sur E car pour tout $x \in E$, $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée (par 0).

Montrons que f est 1-lipschitzienne. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\forall a \in A, f(x) \leq \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

donc

$$\forall a \in A, f(x) - \|x - y\| \leq \|y - a\|.$$

Ainsi $f(x) - \|x - y\|$ minore $\{\|y - a\| \mid a \in A\}$. Or $f(y)$ est le plus grand minorant de cette partie, donc $f(x) - \|x - y\| \leq f(y)$ et donc $f(x) - f(y) \leq \|x - y\|$.

En inversant les rôles de x et y , on obtient $f(y) - f(x) \leq \|y - x\| = \|x - y\|$.

Ainsi f est 1-lipschitzienne, donc continue.

- 1) On note A le complémentaire de U dans E . D'après la question précédente, f est continue sur le compact K , donc admet un maximum noté r . Ainsi,

$$\forall x \in K, \forall a \in A, \|x - a\| \geq f(x) \geq r.$$

Soit $x \in K$ et $y \in B_x(r)$. Si $y \notin U$, alors $y \in A$ et donc $\|x - y\| \geq r$, une contradiction. Donc $y \in U$.

Exercice 7 ★★★

On suppose f^{-1} non continue :

$$\exists x \in L, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists y \in L, \|x - y\| < \eta \text{ et } \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| > \varepsilon.$$

On pose $u = f^{-1}(x)$, et pour tout entier naturel n , $\eta_n = 2^{-n}$. Il existe donc $y_n \in L$ tel que $\|x - y_n\| < 2^{-n}$ et $\|u - f^{-1}(y_n)\| > \varepsilon$. On pose $v_n = f^{-1}(y_n)$.

Comme K est compact, on peut extraire de (v_n) une suite $(v_{\varphi(n)})$ convergente. On note v sa limite. Comme f est continue, $f(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)}$. Or la suite (y_n) converge vers x , donc $x = f(v)$. On en déduit que $u = v$, en contradiction avec $\|u - v_{\varphi(n)}\| > \varepsilon$.

Exercice 8 ★★★

- 1) Fixons x_0 un élément quelconque de E . L'ensemble $\{\|a - x_0\| \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (puisque A est non vide) et majorée (puisque A est bornée), donc admet une borne supérieure $r(x_0)$. Ainsi $A \subset \overline{B}(x_0, r(x_0))$. Cherchons à présent x_0 de sorte à minimiser r : on pose $R = \inf_{x_0 \in E} (r(x_0))$. Si cette borne inférieure est atteinte alors on conclut aisément. Par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(y_n) \in E^n$ telle que $r(y_n) \rightarrow R$. On peut conclure si les y_n vivent dans un compact...

Fixons $y \in A$. On sait que $A \subset \overline{B}(y_n, r(y_n))$, $\|y - y_n\| \leq r(y_n)$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|y_n\| = \|y_n - y + y\| \leq \|y - y_n\| + \|y\| \leq r(y_n) + \|y\|.$$

Comme la suite de réels (r_n) converge, elle est bornée, et donc la suite (y_n) aussi. Puisque E est de dimension finie, on peut extraire de (y_n) une sous-suite convergente, dont on note ℓ la limite. Par suite, pour tout $a \in A$, $\|a - \ell\| \leq R$ et donc $A \subset \overline{B}(\ell, R)$. Par définition de R , $\overline{B}(\ell, R)$ est bien une boule fermée de rayon minimal contenant A .

- 2) Soient x et y deux éléments de E tels que $\overline{B}(x, R)$ et $\overline{B}(y, R)$ soient deux boules de rayon minimal contenant A . Posons m le milieu de x et y : $m = \frac{1}{2}(x + y)$, et comparons $r(m)$ et R . Par définition de R , $R \leq r(m)$. Soit $a \in A$. D'après l'identité du parallélogramme :

$$\|a - m\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\left\| a - m + \frac{1}{2}(x - y) \right\|^2 + \left\| a - m - \frac{1}{2}(x - y) \right\|^2 \right) = \frac{1}{2} (\|a - y\|^2 + \|a - x\|^2) \leq R^2$$

et donc

$$\|a - m\| \leq \sqrt{R^2 - \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\|^2}$$

et par définition de $r(m)$,

$$r(m) \leq \sqrt{R^2 - \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\|^2}.$$

On en déduit que $R \leq r(m) \leq \sqrt{R^2 - \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\|^2} \leq R$ et donc que $\left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\| = 0$, et donc que $x = y$.

Exercice 9 ★★★

- 1) Comme K est stable par f , $f^k(a) \in K$ pour tout entier k , et comme K est convexe, $a_n \in K$ pour tout n . On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) - a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (f^{k+1}(a) - f^k(a)) = \frac{1}{n} (f^n(a) - a).$$

La suite $(f^n(a) - a)$ est bornée car $\|f^n(a)\| \leq r$, et donc $f(a_n) - a_n \rightarrow 0$.

- 2) Comme K est fermé et borné dans un espace de dimension finie, K est compact, on peut donc extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ dont la limite v appartient à K , et comme pour tout n , $f(a_{\varphi(n)}) - a_{\varphi(n)}$ tend vers 0_E et vers $f(v) - v$ (car f est continue puisque linéaire en dimension finie), on conclut par unicité de la limite que $f(v) = v$. De plus $v \neq 0_E$ car $v \in K$ et $0_E \notin K$. Ainsi 1 est bien une valeur propre de f .

Soit λ une valeur propre de f et u un vecteur propre associé à λ . Quitte à multiplier u par un scalaire, on peut supposer que $\|u\| \leq r$. Ainsi $x + u \in K$ et par linéarité de f ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(x + u) = f^n(x) + f^n(u) = f^n(x) + \lambda^n u \in K.$$

On en déduit que la suite $(\lambda^n u)$ est bornée, et donc que $\lambda \in [-1, 1]$.

- 3) L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, mais $f(K) \subset K$ avec K la boule de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
- 4) On remarque que $\frac{e_1}{a} \in K = f(K)$, de même pour $\frac{e_2}{b}$ et $\frac{e_3}{c}$, donc e_1, e_2 et e_3 ont au moins un antécédent par f . Par suite f est un isomorphisme.

Soit λ une valeur propre de f et u un vecteur propre associé. Quitte à multiplier u par un scalaire, on peut supposer que $u \in K$. Puisque les vecteurs $f^n(u)$ ($n \in \mathbb{N}$) appartiennent à K , la suite $(\lambda^n u)$ est bornée et donc $|\lambda| \leq 1$.

Comme f est un isomorphisme, $\frac{1}{\lambda}$ est aussi une valeur propre de f^{-1} (on rappelle que $\lambda \neq 0$ puisque f est bijective), et donc le même raisonnement conduit à $|\frac{1}{\lambda}| \leq 1$. Par suite, $|\lambda| = 1$.

Enfin, en dimension impaire, f a nécessairement au moins une valeur propre réelle, qui vaut donc 1 ou -1 .

Exercice 10 ★★★

- 1) Par définition de S , on sait qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u \neq 0$, $0 \leq u$ et $\lambda u \leq Au$. Posons $U = \sum_{i=1}^n u_i$. Comme $u \geq 0$, $U \geq 0$ et comme $u \neq 0$, $U > 0$. On pose alors $x = \frac{u}{U}$, et ainsi $x \neq 0$, $0 \leq x$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ et $\lambda x = \frac{\lambda}{U} u \leq \frac{1}{U} Au = Ax$.

- 2) Comme λ est une valeur propre de A , il existe un vecteur u non nul tel que $Au = \lambda u$, et donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda u_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j.$$

Posons $x = (|u_1|, \dots, |u_n|) \geq 0$. Ce vecteur est non nul et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda| x_i = |\lambda u_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} u_j| = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

et donc $|\lambda| x \leq Ax$. Par suite, $|\lambda| \in S$.

- 3) Soit $\lambda \in S$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda x \leq Ax$ et $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda x_i \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq \max_{1 \leq j \leq n} (x_j) \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

et en particulier, en choisissant pour i l'indice qui maximise les x_j , on obtient

$$\lambda \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

et donc S est majoré par $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}$.

- 4) Comme $\mathbb{R}$ est de dimension finie, il suffit de prouver que S est fermée.

Soit (λ_n) une suite d'éléments de S convergente. Notons λ sa limite et montrons que $\lambda \in S$. Il existe une suite (x_n) de vecteurs de $K = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid 0 \leq u, \sum_{i=1}^n u_i = 1\}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda x_n \leq A x_n.$$

La partie K étant fermée et bornée dans $\mathbb{R}^n$, il s'agit d'une partie compacte. On extrait de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, dont la limite x appartient à K . En passant à la limite, on obtient les inégalités $\lambda x \leq Ax$ et $0 \leq x$. De plus, $x \in K$ et $0 \notin K$ donc $x \neq 0$. On en déduit que $\lambda \in S$.

Ainsi S est compacte.

- 5) Puisque S est compacte, S possède un maximum (et un minimum). Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha x \leq Ax$, $0 \leq x$ et $x \neq 0$.

Supposons $\alpha x \neq Ax$. Ainsi $0 \leq Ax$ et $Ax \neq 0$. Posons $u = Ax$. Il s'agit d'un vecteur dont toutes les coordonnées sont strictement positives (par calcul). Cherchons $\varepsilon > 0$ tel que $(\alpha + \varepsilon)u \leq Au$.

Or pour tout $\varepsilon > 0$, $(\alpha + \varepsilon)u = \alpha Ax + \varepsilon u$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon u \leq A(Ax - \alpha x)$. C'est possible car u est strictement positif et $A(Ax - \alpha x)$ aussi par hypothèse.

Ainsi

$$(\alpha + \varepsilon)u = \alpha u + \varepsilon u \leq \alpha Ax + Ay = \alpha Ax + Au - \alpha Ax = Au$$

donc $\alpha + \varepsilon \leq \alpha$, une contradiction.

On en déduit que $\alpha x = Ax$ et que $\alpha x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j > 0$ pour tout i .

Exercice 11 ★★★

1) Supposons que

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in K, \forall i \in I, B(x, \alpha) \not\subset U_i.$$

En particulier, pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in K$ tel que

$$\forall i \in I, B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset U_i.$$

Puisque K est compact, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, dont la limite x appartient à K .

Puisque $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Comme U_i est une partie ouverte, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Puisque $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \|x_{\varphi(n)} - x\| \leq \frac{r}{2} \text{ et } \frac{1}{n} \leq \frac{r}{2}$$

et donc, pour tout $n \geq N$ et tout $y \in B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{n}\right)$,

$$\|y - x\| \leq \|y - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x\| \leq \frac{1}{n} + \frac{r}{2} \leq r$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \geq N, B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{n}\right) \subset B(x, r) \subset U_i$$

une contradiction.

2) Supposons qu'une telle famille finie de boules n'existe pas. On définit récursivement une suite (x_n) de K de la façon suivante :

- on choisit x_0 dans K ;
- pour $n \in \mathbb{N}$, en supposant $x_0, \dots, x_n$ déjà définis, on choisit x_{n+1} dans $K \setminus \bigcup_{i=0}^n B(x_i, \alpha)$.

Par compacité de K , on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente, dont la limite x appartient à K . En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|x_n - x\| < \frac{\alpha}{2}$. En particulier $\|x_{N+1} - x_N\| \leq \|x_{N+1} - x\| + \|x - x_N\| < \alpha$, en contradiction avec la définition de x_{N+1} .

3) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \alpha)$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On sait par définition de α qu'il existe $\varphi(i) \in I$ tel que $B(x_i, \alpha) \subset U_{\varphi(i)}$. Ainsi

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \alpha) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\varphi(i)},$$

et donc K peut être recouvert par une sous-famille finie de la famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$.