

K D O D U 0 6 / 0 3 / 2 0 2 6

Intégrales à paramètre

THÉORÈME 1 (de continuité sous le signe intégral)

Soient X et T deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$. Si

- (i) pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X ;
- (ii) pour chaque $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est cpm sur T ;
- (iii) il existe une fonction φ cpm et intégrable sur T telle que $\forall (x, t) \in X \times T$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_T f(x, t) dt$ est continue sur X .

THÉORÈME 2 (de dérivation sous le signe intégral)

Soient X et T deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$. Si

- (i) pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X ;
- (ii) pour chaque $x \in X$, $\begin{cases} \text{la fonction } t \mapsto f(x, t) \text{ est cpm et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T ; \\ \text{la fonction } t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est cpm sur } T ; \end{cases}$
- (iii) il existe une fonction φ cpm et intégrable sur T telle que $\forall (x, t) \in X \times T$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_T f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et $\forall x \in X$, $g'(x) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

EXERCICE 3 (CCINP MP-MPI Math 1 2024) —

- 1) Montrer que l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$ est absolument convergente, pour tout réel x .
- 2) Calculer $F(0)$ et $F(1)$. Comparer $F(x)$ et $F(-x)$.
- 3) Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- 4) Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \triangleright$ **exercice 14 du chapitre V**.
- 5) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
- 6) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- 7) Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $F'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ et calculer $F'(1)$.
- 8) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ est convergente et la calculer.
- 9) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

COROLLAIRE 4

Soient X et T deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$. Si

- (i) pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur X ;
- (ii) pour chaque $x \in X$, $\begin{cases} \text{la fonction } t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \text{ est cpm et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T \text{ pour chaque } j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket ; \\ \text{la fonction } t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \text{ est cpm sur } T ; \end{cases}$
- (iii) il existe une fonction φ cpm et intégrable sur T telle que $\forall (x, t) \in X \times T$, $|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_T f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur X et $\forall j \leq k$, $\forall x \in X$, $g^{(j)}(x) = \int_T \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$.