

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 18
Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Exercice 1. Soient E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On dit qu'un endomorphisme f conserve l'orthogonalité si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x|y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x)|f(y) \rangle = 0.$$

1. On suppose que f est un endomorphisme conservant l'orthogonalité.

(a) Soient i et j distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\langle f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j) \rangle$ et en déduire que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

(b) En déduire qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x|y \rangle$.

2. Montrer qu'un endomorphisme f conserve l'orthogonalité si, et seulement si, il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle g tels que $f = \lambda g$.

1. (a) $\langle f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j) \rangle = \langle f(e_i) + f(e_j)|f(e_i) - f(e_j) \rangle = \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$ sans aucune hypothèse.

Si $i \neq j$, alors $(e_i + e_j) \perp (e_i - e_j)$ car $\langle e_i + e_j|e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2$ et la base est orthonormée. Or, par hypothèse, f conserve l'orthogonalité, d'où $f(e_i + e_j) \perp f(e_i - e_j)$.

On en déduit que $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = 0$, donc $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

(b) De la question précédente, on déduit que $\|f(e_i)\|$ ne dépend pas de i . Notons λ cette constante. Alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\langle f(e_i)|f(e_j) \rangle = \lambda^2 \langle e_i|e_j \rangle$$

(c'est vrai si $i = j$ par définition de λ ; c'est aussi vrai si $i \neq j$ car $0 = \lambda^2 \times 0$). C'est encore vrai pour deux vecteurs

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \text{ quelconques car :}$$

$$\begin{aligned} \langle f(x)|f(y) \rangle &= \left\langle \sum_i x_i f(e_i) \middle| \sum_j y_j f(e_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \langle f(e_i)|f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \lambda^2 \delta_{ij} \\ &= \lambda^2 \sum_i x_i y_i \\ &= \lambda^2 \langle x|y \rangle \end{aligned}$$

2. Si $f = \lambda g$ et g est une isométrie, alors f conserve l'orthogonalité car : pour tous vecteurs x et y dans E , $\langle \lambda g(x)|\lambda g(y) \rangle = \lambda^2 \langle g(x)|g(y) \rangle = \lambda^2 \langle x|y \rangle$ car g est une isométrie. On en déduit que : $x \perp y \implies \lambda g(x) \perp \lambda g(y)$.

Réciproquement, si f conserve l'orthogonalité, alors il existe un scalaire λ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x)|f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x|y \rangle \quad (*)$$

d'après la question 1.

Ou bien $\lambda \neq 0$: on peut alors définir $g = \frac{1}{\lambda} f$ de sorte que $\langle g(x)|g(y) \rangle = \langle x|y \rangle$ d'après (*), donc g est une isométrie et $f = \lambda g$.

Ou bien $\lambda = 0$: alors, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|^2 = 0^2 \|x\|^2 = 0$ d'après (*), d'où $f(x) = 0_E$, d'où f est l'application nulle et on peut aussi l'écrire $f = 0 \text{ id}$ qui est le produit du scalaire 0 et de l'isométrie id .

Exercice 2. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E .

Montrer que f est une rotation si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Supposons que : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ (*). Soit (i, j, k) une *bond* de E . Si $(f(i), f(j), f(k))$ est aussi une *bond*, alors l'application f sera bien une rotation car elle transformera une *bond* en une *bond*. Notons $I = f(i)$, $J = f(j)$ et $K = f(k)$. D'après (*),

$$K = I \wedge J \quad , \quad I = J \wedge K \quad \text{et} \quad J = K \wedge I.$$

On en déduit que la famille (I, J, K) est :

- orthogonale car
$$\begin{cases} K = I \wedge J \implies K \perp I \text{ et } K \perp J \\ I = J \wedge K \implies I \perp J \text{ et } I \perp K \\ J = K \wedge I \implies J \perp K \text{ et } J \perp I \end{cases}$$
- normée car, à cause de l'orthogonalité de (I, J, K) ,
$$\begin{cases} K = I \wedge J \implies \|K\| = \|I\| \times \|J\| \\ I = J \wedge K \implies \|I\| = \|J\| \times \|K\| \\ J = K \wedge I \implies \|J\| = \|K\| \times \|I\| \end{cases} \quad , \text{ d'où } \|I\|, \|J\| \text{ et } \|K\| \text{ sont égaux à } 1 \text{ ou } 0 \text{ (et ce ne peut être } 0 \text{ car } f \neq 0 \text{ par hypothèse)} ;$$
- une *bon directe* car elle est orthogonale, normée et $I \wedge J = +K$.

Donc f est une rotation. Réciproquement : supposons que f est une rotation. Soient deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$. Si, pour tout $v \in E$, $\langle f(x \wedge y) | v \rangle = \langle f(x) \wedge f(y) | v \rangle$, alors les vecteurs $f(x \wedge y)$ et $f(x) \wedge f(y)$ seront bien égaux.

Or f est bijective (c'est le cas de toute isométrie), d'où il existe un vecteur $v \in E$ tel que $v = f(z)$. D'où :

- d'une part, $\langle f(x \wedge y) | v \rangle = \langle f(x \wedge y) | f(z) \rangle = \langle x \wedge y | z \rangle$ car f est une isométrie, donc conserve le produit scalaire ;
- d'autre part, $\langle f(x) \wedge f(y) | v \rangle = \langle f(x) \wedge f(y) | f(z) \rangle = \det(f(x), f(y), f(z))$ par définition du produit vectoriel, or $\det(f(x), f(y), f(z)) = \det(f) \times \det(x, y, z)$ (propriété du déterminant) et $\det(f) = +1$ car f est une rotation.

Donc $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

Exercice 3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On définit la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

- On note $s = a + b + c$. Montrer que $|s| \leq \sqrt{3}$.
- Montrer que $\det(A) = \frac{s}{2}(3 - s^2)$. En déduire que $|\det(A)| \leq 1$.
- Montrer que : $|\det(A)| = 1$ si, et seulement si, A est une matrice orthogonale.

- D'après l'inégalité de Cauchy & Schwarz, $|(a, b, c) \cdot (1, 1, 1)| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$.

Donc $|s| \leq \sqrt{3}$.

$$2. \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{vmatrix} = s \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \quad (*)$$

$$\text{D'où } \det(A) = s \cdot \frac{1}{2} [3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2] = \frac{s}{2}(3 - s^2).$$

Posons $f(s) = \frac{s}{2}(3 - s^2)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Cette fonction f est dérivable et $f'(s) = \frac{3}{2}(1 - s^2)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, d'où le tableau des variations de f sur $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$:

s	$-\sqrt{3}$	-1	$+1$	$+\sqrt{3}$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0
$f(s)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-1	$+1$	0

Donc $|\det(A)| \leq 1$.

- Si la matrice A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$. (C'est vrai pour toute matrice orthogonale.)

Réciproquement : si $\det(A) = \pm 1$, alors (d'après le tableau des variations) $s = \pm 1$, d'où (d'après (*)) $ab + ac + bc = 0$. D'où les colonnes de la matrice A sont orthogonales deux à deux. De plus, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (par hypothèse), d'où les colonnes de la matrice A forment une base orthonormée. Donc la matrice A est orthogonale.