

CORRIGÉ DU D.S. N° 7 DE MATHÉMATIQUES

L'exercice est tiré de CENTRALE 2017 MP MATH 1.
La première partie du problème est tirée de CCINP 2008 MP MATH 1
et les parties suivantes de CENTRALE 2018 PC MATH 2.

EXERCICE

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On note $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ les parties symétrique et antisymétrique de M .

- 1) Montrer que $X^T A X = 0$ pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
- 2) En déduire que toute valeur propre réelle de M appartient à l'intervalle $[\min \operatorname{Sp}(S), \max \operatorname{Sp}(S)]$.
- 3) On suppose dans cette question que la matrice S est définie positive : $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que :
 - a) les matrices S et M sont inversibles ;
 - b) il existe une matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = B^2$;
 - c) la matrice $Q = B^{-1} A B^{-1}$ est antisymétrique et que $\det(M) = \det(S) \det(I_n + Q)$;
 - d) toute valeur propre complexe d'une matrice antisymétrique à coefficients réels est imaginaire pure ;
 - e) $\det(M) \geq \det(S)$.
- 4) On suppose que la matrice M est orthogonale : $M \in O_n(\mathbb{R})$.
 - a) Montrer que $\operatorname{Sp}(S) \subset [-1, +1]$.
 - b) Montrer que, si une valeur propre λ de S appartient à $] -1, +1[$, alors le sous-espace propre associé $E_\lambda(S)$ est de dimension paire.

- 1) $X^T A X$ est un scalaire, d'où $X^T A X = (X^T A X)^T = X^T A^T (X^T)^T = -X^T A X$ car $A^T = -A$, donc

$$X^T A X = 0.$$

- 2) Soient μ une valeur propre réelle de la matrice M et $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé : $MX = \mu X$ et $X \neq 0$. D'une part, $X^T M X = X^T \mu X = \mu X^T X = \mu \|X\|^2$.

D'autre part, la matrice S étant symétrique, il existe d'après le théorème spectral une base orthonormée $(X_1, \dots, X_n)$ formée de vecteurs propres X_i de S . Soit λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i . Le vecteur X s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \text{ dans cette base. Et}$$

$$X^T S X = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right)^T \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i X_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j \alpha_i \lambda_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i$$

est plus petit que $\lambda_{\max} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_{\max} \|X\|^2$ et plus grand que $\lambda_{\min} \|X\|^2$, en notant $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ les plus grande et plus petite valeurs propres de S . Or $X^T M X = X^T A X + X^T S X = 0 + X^T S X$ d'après la question précédente. D'où

$$\lambda_{\min} \|X\|^2 \leq \mu \|X\|^2 \leq \lambda_{\max} \|X\|^2. \text{ Enfin } \|X\|^2 > 0 \text{ car } X \neq 0, \text{ donc}$$

$$\lambda_{\min} \leq \mu \leq \lambda_{\max}$$

en divisant par $\|X\|^2 > 0$.

- 3) a) De $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on tire que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives. En particulier, 0 n'est pas une valeur propre de S , donc

la matrice S est inversible.

De plus, la plus petite valeur propre $\lambda_{\min}$ de S

est strictement positive et la question précédente prouve que toute valeur propre réelle de M est supérieure à $\lambda_{\min}$,

donc non nulle, donc

la matrice M est inversible.

- b) Parce que la matrice S est symétrique, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ d'après le théorème spectral. On peut poser $B = P^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$ car les valeurs propres de la matrice S sont supposées positives. Alors $B^T = P^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^T (P^T)^T = B$ et la matrice B est donc symétrique. De plus, les valeurs propres de B sont les $\sqrt{\lambda_i}$ car $B = P^{-1} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$ est semblable à $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Et les réels λ_i

sont strictement positifs par hypothèse. Donc

$B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Enfin $B^2 = P^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P \cdot P^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$, d'où

$$B^2 = S$$

car $PP^T = I_n$ du fait que

$P \in O_n(\mathbb{R})$.

- c) $Q^T = (B^{-1})^T A^T (B^{-1})^T = (B^T)^{-1} (-A) (B^T)^{-1} = -Q$ car A est antisymétrique et B symétrique. Donc

la matrice Q est antisymétrique.

De plus, $M = S + A = B \cdot (I_n + B^{-1}AB^{-1}) \cdot B$, d'où :

$$\det(M) = \det(B) \det(I_n + B^{-1}AB^{-1}) \det(B) = \det(B)^2 \det(I_n + B^{-1}AB^{-1}) = \det(B^2) \det(I_n + Q),$$

donc

$$\det(M) = \det(S) \det(I_n + Q).$$

- d) Soit λ une valeur propre complexe d'une matrice antisymétrique A : il existe alors $Z \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tel que $AZ = \lambda Z$ et $Z \neq 0$. Notons $\bar{\lambda}$ le conjugué du complexe λ et $\bar{Z}$ le vecteur colonne dont les coordonnées $\bar{z}_i$ sont les conjuguées des coordonnées z_i de Z . D'une part $\bar{Z}^T AZ = \bar{Z}^T \lambda Z = \lambda \bar{Z}^T Z$. D'autre part $(\bar{Z}^T AZ)^T = Z^T A^T \bar{Z} = -Z^T A \bar{Z}$ car la matrice A est antisymétrique. Et $-Z^T A \bar{Z} = -Z^T \bar{\lambda} \bar{Z}$ car les coefficients de la matrice A sont réels. Et $-Z^T \bar{\lambda} \bar{Z} = -\bar{\lambda} Z^T \bar{Z}$.

D'où les scalaires $\lambda \bar{Z}^T Z$ et $-\bar{\lambda} Z^T \bar{Z}$ sont égaux. Or $\bar{Z}^T Z = Z^T \bar{Z} = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \neq 0$ car $Z \neq 0$. D'où $\lambda = -\bar{\lambda}$, donc

λ est imaginaire pure.

- e) Le polynôme caractéristique $\det(XI_n + Q) = \chi_{-Q}$ de la matrice $-Q$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et est de la forme $\chi_{-Q} = X^{n-2s} \prod_{k=1}^s (X - i\mu_k)(X + i\mu_k)$ où les μ_k sont $s \geq 0$ réels non nuls car la matrice $-Q$ est antisymétrique et ses valeurs propres sont imaginaires pures d'après les deux questions précédentes. D'où $\det(I_n + Q) = \chi_{-Q}(1) = 1^{n-2s} \prod_{k=1}^s (1 - i\mu_k)(1 + i\mu_k) = \prod_{k=1}^s (1 + \mu_k^2) \geq 1$. (Et, dans le cas où $s = 0$, ce produit vaut 1.) Donc

$$\det(M) \geq \det(S).$$

- 4) La matrice M étant orthogonale, il existe d'après le théorème de réduction d'une isométrie en base orthonormée une matrice $P \in O(n)$ telle que

$$P^T M P = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_k} & & 0 \\ & & 0 & I_p & \\ & & & & -I_q \end{pmatrix}$$

où on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

De $M = A + S$, on tire que $P^T M P = P^T A P + P^T S P$ et, en constatant que la matrice $P^T A P$ est antisymétrique et que $P^T S P$ est symétrique, on en déduit que

$$P^T S P = \text{diag}(\cos \theta_1, \cos \theta_1, \dots, \cos \theta_k, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1).$$

Les matrices S et $P^TSP = P^{-1}SP$ étant semblables, elles ont le même spectre, donc :

- | | |
|-----------|--|
| a) | $\text{Sp}(S) \subset [-1, 1]$. |
| b) | le sous-espace propre de S associé à toute valeur propre $\lambda \in]-1, 1[$ est de dimension paire. |

PROBLÈME

La fonction zêta de Riemann est définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de ζ .

Les parties du problème à suivre sont indépendantes.

La fonction zêta alternée

On note $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 2) Déterminer l'ensemble de définition de $F : x \mapsto F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
- 3) Déterminer la valeur de $F(1)$.
- 4) Étudier la limite de F en $+\infty$.
- 5) Soit $x > 0$. Montrer que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
- 6) Montrer que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $F'(1)$ comme la somme d'une série.
- 7) Montrer que, pour tout $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = -2^{1-x}\zeta(x)$.
- 8) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+ .
- 9) Montrer qu'il existe deux constantes α et β , qu'on exprimera en fonction de $F(1)$ et de $F'(1)$, telles que

$$\zeta(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \beta + o_{x \rightarrow 1^+}(1).$$

La loi de probabilité zêta

On note $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

- 10) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}.$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x , ce qu'on suppose désormais.

- 11) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ .
- 12) Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ .
- 13) En déduire la variance de X pour tout $x > 3$.
- 14) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}$.

Soit $(q_1, \dots, q_n)$ un n -uplet de nombres premiers distincts deux à deux.

- 15) Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \dots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont indépendants.

Cela entraîne, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

- 16) Montrer que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

Un développement en série entière

On note $g_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > -1$.

- 17) Montrer que $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ est défini pour tout réel $x > -1$.
- 18) Montrer que, pour tout $x > -1$:

$$G(x+1) - G(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- 19) Calculer $G(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et étudier la limite de la fonction G en $+\infty$.
- 20) Montrer que la fonction G est continue sur $] -1, +\infty[$.
- 21) Déterminer un équivalent de $G(x)$ quand le réel x tend vers -1^+ .
- 22) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $] -1, +\infty[$ et que $G^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1)$.
- 23) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \left| G^{(k)}(x) \right| \leq k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right).$$

- 24) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in] -1, +1[$. On pose $R_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} G^{(k+1)}(t) dt$. Montrer que

$$|R_k(x)| \leq \left(A + \frac{1}{1+x} \right) |x|^{k+1}.$$

- 25) Montrer que la fonction G est développable en série entière sur $] -1, +1[$.
- 26) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$?

1) D'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$. L'ensemble de définition de la fonction ζ est donc $]1, +\infty[$.

La fonction zêta alternée

- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge d'après le théorème des séries alternées. Si $x \leq 0$, alors la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

diverge (grossièrement). Donc

l'ensemble de définition de la fonction F est $]0, +\infty[$.

- 3) On utilise le théorème radial d'Abel. La série entière $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 et $\forall x \in]-1, +1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x)$. De plus, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge car la suite $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant, d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(1+x) = \ln 2$. Donc

$$F(1) = \ln 2.$$

- 4) $\forall n \geq 1, \forall x \geq 2, \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[2, +\infty[$. De plus, pour tout $n \geq 2, \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et, pour $n = 1$,

$\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. D'après le théorème de la double limite,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1.$$

- 5) Soit $x > 0$. La fonction $h : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $h'(t) = \frac{t^{x-1}(1-x \ln t)}{t^{2x}}$. D'où la fonction h' est négative sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$. D'où la fonction h est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$.

Donc la suite numérique $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $[e^{1/x}] + 1$.

- 6) Chaque fonction $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} e^{-x \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.

Soit $a > 0$. On pose $N_a = [e^{1/a}] + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite numérique $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant. D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum_{n \geq N_a} f'_n(x)$ converge et, pour tout $n \geq N_a$, son reste $R_n(x)$ vérifie

$|R_n(x)| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$, qui est un majorant. D'où $\sup_{x \geq a} |R_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$ car le $\sup$ est le plus petit majorant. Or $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où la suite des restes R_n converge uniformément vers la fonction nulle. Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. On utilise alors le théorème de dérivation terme à terme :

- pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$;
- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$ et sa somme est F ;
- la série de fonctions $\sum_{n \geq N_a} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$

sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

Cette propriété locale est vraie sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc aussi sur $]0, +\infty[$.

- 7) Pour tout $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x} \zeta(x)$. On en déduit l'égalité

$$F(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x).$$

- 8) D'une part, $2^{1-x} = e^{(1-x) \ln 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, d'où $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \zeta(x)$. D'autre part, $\zeta(x) = \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}}$ pour tout $x > 1$.

Au numérateur, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} F(1)$ car la fonction F est continue d'après la question 6 et $F(1) = \ln(2)$ d'après la question 3, d'où $F(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln 2$. Au dénominateur, $2^{1-x} = e^{(1-x) \ln 2} = 1 - (x-1) \ln 2 + o_{x \rightarrow 1}(x-1)$, d'où $1 - 2^{1-x} \sim (x-1) \ln 2$.

Donc
$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

- 9) On pousse les DL en posant $h = x - 1$.

Au numérateur, la fonction F est dérivable en 1, d'où : $F(x) = F(1) + hF'(1) + o(h) = \ln 2 + hF'(1) + o(h)$. Au dénominateur, $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-h \ln 2} = h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)$. D'où

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{h \ln 2} \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{1 - \frac{\ln 2}{2} h + o(h)} \\ &= \frac{1}{h \ln 2} (\ln 2 + hF'(1) + o(h)) \left(1 + \frac{\ln 2}{2} h + o(h) \right) = \frac{1}{h \ln 2} \left(\ln 2 + h \left(F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2} \right) + o(h) \right) \\ &= \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1) \end{aligned}$$

La loi de probabilité zêta

- 10) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\zeta(x)n^x} \geq 0$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{\zeta(x)}{\zeta(x)} = 1$$

donc on définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 11) La variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum n \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|n \mathbb{P}(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-1}}$, cette convergence a lieu si, et seulement si, $x - 1 > 1$, c'est-à-dire $x > 2$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$$

- 12) D'après le théorème de transfert, X^k possède une espérance si, et seulement si, la série $\sum n^k \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. C'est le cas si, et seulement si, $x - k > 1 \iff x > k + 1$. Alors

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}$$

- 13) Soit $x > 3$: d'après la relation de König & Huygens, la va X possède une variance et

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\zeta(x-2)}{\zeta(x)} - \left(\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} \right)^2 = \frac{\zeta(x)\zeta(x-2) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}$$

- 14) Pour $a \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ est la réunion disjointe $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X = an)$. Par σ -additivité,

$$\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = an) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(x)(an)^x} = \frac{1}{a^x}$$

- 15) Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$. L'événement $\bigcap_{i \in I} (X \in q_i \mathbb{N}^*)$ est réalisé si, et seulement si, $\prod_{i \in I} q_i$ divise X (car les q_i sont premiers entre eux).

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} (X \in q_i \mathbb{N}^*) \right) = \mathbb{P} \left(X \in \left(\prod_{i \in I} q_i \right) \mathbb{N}^* \right) = \frac{1}{(\prod_{i \in I} q_i)^x} = \prod_{i \in I} \frac{1}{q_i^x} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in q_i \mathbb{N}^*)$$

Ceci prouve l'indépendance des événements $(X \in q_k \mathbb{N}^*)_{1 \leq k \leq n}$.

- 16) La suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion car $B_{n+1} = B_n \cap (X \notin p_{n+1} \mathbb{N}^*) \subset B_n$. Par continuité décroissante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \right)$$

Cette intersection est l'événement $(X = 1)$ car un entier n non nul possède un diviseur premier si, et seulement si, $n \geq 2$.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{\zeta(x)}$. Par indépendance des complémentaires,

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X \notin p_k \mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x} \right)$$

Donc $\frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x} \right)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

Un développement en série entière

- 17) Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_k : x \mapsto \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ est définie sur $] -1, +\infty[$. Soit $x > -1$: $f_k(x) = \frac{x}{k(k+x)}$, d'où

$|f_k(x)| \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|x|}{k^2}$. La série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, d'où la série numérique $\sum f_k(x)$ converge (absolument). Donc la fonction G est définie pour tout $x > -1$.

- 18) Soit, pour chaque $n \geq 1$ et chaque $x > -1$, la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$:

$$S_n(x+1) - S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+1+x} \right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1+x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x}. \text{ D'où } G(x+1) - G(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- 19) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $G(k) = G(0) + \sum_{n=0}^{k-1} [G(n+1) - G(n)]$. Or $G(0) = 0$ et, d'après la question 18, $G(n+1) - G(n) = \frac{1}{n+1}$.

D'où $G(k) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers ∞ . Or la fonction G est croissante, car chaque fonction g_n est croissante. Donc la fonction G possède une limite en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Or la suite des réels $G(k)$ tend vers $+\infty$ donc, par unicité de la limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.

- 20) Soit $a > -1$. Pour tous $n \geq 2$ et $x \in] -1, a]$, $|f_n(x)| \leq \frac{\max(1, |a|)}{n(n-1)}$. Or la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\max(1, |a|)}{n(n-1)}$ converge. D'où la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} g_n$ converge normalement sur $] -1, a]$.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 2} g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $] -1, a]$. Or chaque fonction g_n est continue

sur $] -1, a]$. Donc la fonction $\sum_{n=2}^{\infty} g_n$ est continue sur $] -1, a]$ et il en est de même de la fonction $G = g_1 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n$ car la fonction g_1 est aussi continue. C'est vrai pour tout $a > -1$. Donc la fonction G est continue sur $] -1, +\infty[$.

- 21) De la question 18, on tire que $\frac{G(x)}{\frac{-1}{1+x}} = 1 + \frac{G(x+1)}{\frac{-1}{1+x}} = 1 - (1+x)G(x+1)$. Si x tend vers -1^+ , alors $G(x+1)$ tend vers

$G(0)$ car la fonction G est continue d'après la question 20. D'où $(1+x)G(x+1)$ tend vers $0G(0) = 0$. Donc $\frac{G(x)}{\frac{-1}{1+x}}$ tend vers 1. Donc $G(x) \sim \frac{-1}{1+x}$.

- 22) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $a > -1$.

Chaque fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\forall x \in [a, +\infty[$, $g_n^{(j)}(x) = \frac{(-1)^{j+1} j!}{(x+n)^{j+1}}$. On sait déjà que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $] -1, +\infty[$. Pour montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$, il suffit de montrer que la série de fonctions $\sum g_n^{(j)}$ converge simplement pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ et que $\sum g_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

C'est le cas car, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\forall x \in [a, +\infty[$, $|g_n^{(j)}(x)| \leq \frac{j!}{(a+n)^{j+1}}$. Et la série $\sum \frac{1}{(a+n)^{j+1}}$ converge d'après le critère de Riemann car $j+1 > 1$. D'où la convergence normale, donc uniforme, donc simple, de la série de fonctions $\sum g_n^{(j)}$.

La fonction G est donc de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[$, $G^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$. Ceci est vrai pour tout $a > -1$, donc vrai sur $] -1, +\infty[$.

En particulier, $G^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+0)^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1)$.

23) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} |G^{(k)}(x)| &= \left| (-1)^{k+1}k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}} \right| \\ &= k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}} \text{ par l'inégalité triangulaire car } n+x > 0 \\ &= k! \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}} \right) \\ &\leq k! \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} \right) \text{ car } n \geq 2 \implies n+x > 1 \implies (n+x)^{k+1} \geq (n+x)^2 \geq (n-1)^2 \\ &= k! \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \\ &= k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right) \text{ en posant } A = \zeta(2). \end{aligned}$$

24) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} |R_k(x)| &\leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} (n+1)! \left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right) dt \right| \text{ car l'intégrande ne change pas de signe} \\ &\leq \left| \int_0^x (n+1)A(x-t)^n dt \right| + \left| \int_0^x (n+1) \frac{(x-t)^n}{(t+1)^{n+2}} dt \right| \text{ par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire} \\ &\leq \left| [-A(x-t)^{n+1}]_0^x \right| + \left| \int_0^x (n+1) \frac{1}{(1+t)^2} \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n dt \right| \\ &\leq A|x|^{n+1} + \left| \int_0^x (n+1) \frac{1}{(1+t)^2} \left(\frac{1+x}{1+t} - 1 \right)^n dt \right| \\ &\leq A|x|^{n+1} + \left| \left[\frac{1}{1+x} \left(\frac{1+x}{1+t} - 1 \right)^{n+1} \right]_0^x \right| \text{ car l'intégrande est de la forme } u'u^n \\ &\leq A|x|^{n+1} + \left| \frac{1}{x+1} x^{n+1} \right| = A|x|^{n+1} + \frac{|x|^{n+1}}{1+x} = \left(A + \frac{1}{1+x} \right) |x|^{n+1} \end{aligned}$$

25) $R_k(x)$ est le reste de la formule de Taylor avec reste intégral, qui s'écrit

$$G(x) = \sum_{n=0}^k \frac{G^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_k(x) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n + R_k(x)$$

pour tout $x \in] -1, +1[$ et à tout ordre $k \in \mathbb{N}^*$ car la fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question 22.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\left(A + \frac{1}{1+x} \right) |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'où $|R_k(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ d'après la théorie des gendarmes. Donc la fonction G est développable en série entière sur $] -1, +1[$ et

$$\forall x \in] -1, +1[, G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n.$$

26) D'après le DSE de la question précédente, le rayon R de convergence de la série entière $\sum (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$ est supérieur à 1. En $x = 1$, cette série diverge grossièrement car $\zeta(k+1)$ ne tend pas vers zéro puisque la fonction ζ est minorée par 1.

Donc $R = 1$.