

T H È M E N° 3

I n t é g r a l e s

7 mars 2026

OBJECTIF : Réviser les intégrales impropres [▷ III](#) et les intégrales à paramètre [▷ XIII & Kdo06032026](#) mais aussi le théorème de la convergence dominée [▷ V.11](#). Vous pouvez rédiger et me rendre notamment les exercices 10, 11 & 12 ainsi que le [▷ DS6*2024-2025pb2](#), dans la case *Thème 3* du Cahier de Prépa.

A • Rédiger :

- une intégrale impropre $\int_{]0,+\infty[}$ des deux côtés converge *ssi* les deux intégrales $\int_{]0,42]}$ et $\int_{]42,+\infty[}$ convergent (et non pas pas *ssi* leur somme converge) ;
- on intègre par parties [▷ III.19](#) sans oublier l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ des deux fonctions du crochet et, si l'intégrale est impropre, de poser une « barrière » (ou de montrer au préalable que le terme entre crochets a une limite finie) ;
- on change de variable [▷ III.22](#) sans oublier l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ du *CDV* et aussi, si l'intégrale est impropre, de poser une « barrière » (ou d'invoquer la stricte monotonie du *CDV*) ;

B • Se rappeler :

- qu'une intégrale « n'est même pas impropre » si on intègre une fonction continue sur un segment ;
- ce qu'est une intégrale faussement impropre [▷ III.8, TD3.10q1 & DS3.1q1](#) et qu'une intégrale n'est jamais faussement impropre en $+\infty$ ni en $-\infty$;
- que la divergence grossière d'une intégrale, ça n'existe pas [▷ III.7](#), mais que ça existe quand même si la fonction est uniformément continue [▷ TD5.10](#) ;
- la subtile définition de *cpm* sur un intervalle [▷ III.2 & TD3.7q1](#).

Exercice 10 (La gaussienne & le théo de cv dominée, tiré de CENTRALE-SUPÉLEC 2023 MP-MPI MATH 2).

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.
2. Justifier l'existence de K_n et montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n2^n} \right)$.
3. Montrer que $J_n \geq \frac{1}{2^n}$ et en déduire que $J_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K_n$.
4. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$.
5. En déduire un équivalent de K_n lorsque n tend vers ∞ .
6. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. (Même astuce qu'au [▷ DS4*.2q5&6.](#))
7. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C • Se soucier des notations quand on utilise les théorèmes de continuité et de dérivation d'une intégrale à paramètre [▷ Kdo0603202](#) :

- ne pas confondre la fonction g et le réel $g(x)$, c'est la fonction g qui est continue ou dérivable ;

- ne pas confondre la fonction f et la fonction $t \mapsto f(x, t)$ ou $x \mapsto f(t, x)$;
- de même, ne pas confondre les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ ou $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$;
- écrire $T =]0; 42]$ si l'intégrale $\int_0^{42} f(x, t) dt$ est impropre en 0 et pas en 42 ;
- si $X =]0, +\infty[$, alors il faut parfois le changer en $X_a = [a, +\infty[$ ou $X_b =]0, b]$ voire $X_{a,b} = [a, b]$ pour réussir à dominer la fonction f ou $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Exercice 11 (La gaussienne & une intégrale à paramètre). Soient, pour tout réel x ,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Calculer $F(0)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
2. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

3. Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (G^2)'(x) = -F'(x).$$

4. Calculer $G(0)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ existe et est finie.

5. En déduire la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D • Retravailler la **fonction Gamma d'Euler** [▷ XIII & TD13.8](#). On l'a aussi utilisée pour prouver l'identité d'Euler et la formule de Stirling [▷ DS4*.2](#).

E • Pour établir un équivalent à partir d'une relation fonctionnelle, on utilise tantôt la monotonie [▷ DS3.4q7&8](#), tantôt la continuité : pour tirer, de la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, un équivalent de $\Gamma(x)$ en 0 [▷ XIII](#). Et aussi : [▷ DS7.pb.q8&21, TD13.1q4](#).

F • On dit qu'une fonction f est **intégrable** sur un intervalle I , et on note $f \in L^1(I)$, si $\int_I |f(t)| dt$ est convergente, où $|f(t)|$ est la valeur absolue si $f(t) \in \mathbb{R}$ ou le module si $f(t) \in \mathbb{C}$ comme dans le [▷ DS6*2024-2025pb2](#) que je vous encourage à me rendre (il est tiré de CCINP 2022 MP MATH 1). Et comme dans l'exercice suivant.

Exercice 12 (La gaussienne & la transformée de Fourier). Soit E l'ensemble des fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ telles que la fonction $t \mapsto t^3 \cdot \varphi(t)$ est bornée.

1. Vérifier que E est un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Montrer que, si $\varphi \in E$, alors la fonction $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i2\pi tx} dt$ appelée la *transformée de Fourier* de φ , est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t) e^{-i2\pi tx} dt.$$

3. Soit $\varphi(t) = e^{-\pi t^2}$. Montrer que :
 - (a) la fonction φ appartient à E ;
 - (b) sa transformée de Fourier g est une solution de l'équation différentielle $g'(x) = -2\pi x g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
 - (c) φ est égale à sa transformée de Fourier g .

À propos des espaces de Lebesgue : se rappeler que $L^1(I)$ est un *ev* mais pas un *evn* alors que $L^1(I) \cap \mathcal{C}(I)$ est un *evn* [▷ XI.3.3](#) (grâce au « théorème de l'intégrale nulle »). De même [▷ VIII.4&7](#), $L^2(I)$ est un *ev* car le produit de deux fonctions de $L^2(I)$ est dans $L^1(I)$. N'est pas un espace préhilbertien $\boxed{\text{B}} \boxed{\text{S}} \boxed{\text{P}}$ mais $\boxed{\mathcal{D}}$. Alors que $L^2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ en est un (grâce au « théorème de l'intégrale nulle »). Voir aussi $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$ [▷ Colle15.3](#).

G • L'**intégrale de Dirichlet** est convergente [▷ III.20](#) mais elle n'est pas absolument convergente [▷ III.21](#). On sait même la calculer [▷ TD3.10q.8](#) et c'est une occasion de réviser le lemme de Riemann-Lebesgue [▷ TD3.10q.5](#). Un deuxième calcul [▷ TD13.9q.8](#) utilise la transformée de Laplace [▷ DS8](#).