Corrigé du

Kdo du 6/3/2026

Merci à Arthur Lulé

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \ \left| \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2} \right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est impropre en $+\infty$

or $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge

D'où l'intégrale $F(x)$ est absolument convergente pour tout réel x

2) $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(0)}{1+t^2}\,dt = 0$ car $\mathrm{Arctan}(0) = 0$

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}^2(t)\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi^2}{8}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$F(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(-xt)}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt$ car la fonction Arctan est impaire

$= -F(x)$

3) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$

α D'où $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\text{Arctan}(xt) \leq \text{Arctan}(yt)$ car $xt \leq yt$

car $t \geqslant 0$

et par croissance de la fonction Arctan

D'où $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} \leq \dfrac{\text{Arctan}(yt)}{1+t^2}$

Et donc par croissance de l'intégrale

$$F(x) \leq F(y)$$

D'où la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1}{1+t^2}$

et la fonction $t \longmapsto \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$

De plus $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\left| \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} \right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

D'où d'après le théorème de la convergence dominée

$$F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} F(0) = \frac{\pi^2}{4}$$

Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{\pi^2}{4}$

5) Soient $X = \mathbb{R}$ et $T = [0, +\infty[$

$\forall x \in X, \forall t \in T$, on pose $f(x,t) = \text{Arctan}(xt) \times \frac{1}{1+t^2}$

- Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X
- Pour chaque $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T
- Pour chaque $(x,t) \in X \times T$, $|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$

  et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur T

D'où d'après le théorème de continuité sous le signe intégral :

La fonction F est continue sur $X = \mathbb{R}$

6) Soient $a > 0$, $X_a = [a, +\infty[$ et $T = [0, +\infty[$

- Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur X_a car la fonction $x \mapsto \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{t}{(1+t^2)(1+(tx)^2)}$

  est continue sur X_a

- Pour chaque $x \in X_a$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T et intégrable sur T d'après 1)
- Pour tout $(x,t) \in X_a \times T$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+(ta)^2)}$$

α

et l'intégrale impropre en $+\infty$ $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+(ta)^2)}\,dt$

converge

car l'intégrande est équivalent en $+\infty$

à $\frac{1}{a^2 t^3}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{a^2 t^3} dt$ converge

d'après le critère de Riemann en $+\infty$

D'où d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale la fonction F est C^1 sur X_a et

$$\forall x \in X_a, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+(tx)^2)} dt$$

Or ceci est vrai pour tout $a > 0$, d'où F est C^1 sur $]0, +\infty[$.

7) $\forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}, \forall t \in [0, +\infty[$

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+(tx)^2)} = \frac{\frac{1}{1-x^2} t}{1+t^2} - \frac{\frac{x^2}{1-x^2} t}{1+(tx)^2}$$

D'où $\forall A > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\int_0^A \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2(1-x)} \left[\ln(1+t^2)\right]_0^A - \frac{x^2}{2(1-x^2)x^2} \left[\ln(1+(tx)^2)\right]_0^A$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln\left(\frac{1+A^2}{1+A^2 x^2}\right)$$

Or $\ln\left(\frac{1+A^2}{1+A^2x^2}\right) \xrightarrow[A \to +\infty]{} -\ln(x^2)$ car $\frac{1+A^2}{1+A^2x^2} = \frac{1+\frac{1}{A^2}}{\frac{1}{A}+x^2}$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{x^2}$$

et donc par continuité de $\ln$ on obtient cette limite

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$

et $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \left[\frac{-1}{2(t^2+1)} \right]_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{2}$ Voir aussi ♡

8) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$ est impropre en 0 et en 1

Soient $0<a\leq b<1$:

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$ car

la fonction F est C^1 sur le segment $[a,b]$ d'après la question 6.

Or $F(a) \xrightarrow[a\to0^+]{} F(0)$ et $F(b) \xrightarrow[b\to1^-]{} F(1)$ car la fonction F est continue en 0 et en 1 d'après la question 5. D'où $F(a) \xrightarrow[a\to0^+]{} 0$ et $F(b) \xrightarrow[b\to1^-]{} \frac{\pi^2}{8}$ d'après la question 2.

D'où $\lim\limits_{\substack{a\to0^+\\ b\to1^-}} \int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$ existe et vaut $\frac{\pi^2}{8}-0$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx \text{ cv et vaut } \frac{\pi^2}{8}}$

Autre méthode pour la q. 7.

♡ $\forall x\neq 1$, $F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ et la fonction F' est continue en 1 d'après la question 6. D'où $F'(1) = \lim\limits_{x\to1} F'(x)$.

Or $F'(x) = \frac{1}{x+1}\,\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{1}{2+u}\,\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to0]{} \frac{1}{2}$

en posant $x=1+u$. Donc $\boxed{F'(1)=\frac{1}{2}}$

9) Soit $N \in \mathbb{N}^*$

On remarque que

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ces trois séries convergent d'après le critère de Riemann

D'où par passage à la limite $N \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

D'où $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad (*)$$

De plus, $$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \int_0^1 -\ln(x) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (+x^2)^k \right) dx$$ car $x \in]0,1[$.

D'où (sous réserve qu'on puisse intervertir $\int_0^1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}$) oui

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 -\ln(x)(+x^2)^k\,dx$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $$\int_0^1 -\ln(x)(+x^2)^k\,dx = \left[-\ln(x) \frac{(+x)^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,x}\,dx = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

en effectuant une intégration par parties avec les fonctions C^1 $x \mapsto -\ln(x)$ et $x \mapsto \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

et car le ~~te~~ terme entre crochets converge

car $x^{2k+1}\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

Donc $$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'où d'après (*) et 8) il vient que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'ap. le théo. d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Finalement, on peut intervertir Σ et $\int$ car :

On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : [0,1[\to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -\ln(x)\, x^{2k} \end{cases}$$

Cette suite de fonctions est une suite de fonctions continues et intégrables sur $[0,1[$ et

- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$

α (car ~~c'est~~ une série géométrique)

la série numérique $\sum f_n(x)$ est

- La série de réels $\sum \int_0^1 |f_k(x)|\, dx = \sum \int_0^1 -\ln(x)\, x^{2k}\, dx$ converge car $\int_0^1 -\ln(x)\, x^{2k}\, dx = \frac{1}{(2k+1)^2}$ et la série $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge