

D.S. N° 7 DE MATHÉMATIQUES

Cet énoncé comporte un exercice et un problème.

17 EXERCICE

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On note $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ les parties symétrique et antisymétrique de M .

- 0,5 1) Montrer que $X^T A X = 0$ pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- 3,5 2) En déduire que toute valeur propre réelle de M appartient à l'intervalle $[\min \text{Sp}(S), \max \text{Sp}(S)]$.
0,5 $X^T M X = p \|X\|^2$ 0,5 $X^T M X = X^T S X$ 2 $\lambda_{\min} \|X\|^2 \leq X^T S X \leq \lambda_{\max} \|X\|^2$ 0,5 $\|X\|^2 > 0$
- 3) On suppose dans cette question que la matrice S est définie positive : $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que :
- 1 a) les matrices S et M sont inversibles ;
0,5 0,5
- 2,5 b) il existe une matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = B^2$;
0,5 $B = \dots$ car $\lambda_i > 0$ 0,5 $B^T = B$ 0,5 $B \in S_n^{++}$ car ... 1 th. spectral
- 1,5 c) la matrice $Q = B^{-1} A B^{-1}$ est antisymétrique et que $\det(M) = \det(S) \det(I_n + Q)$;
0,5 0,5
- 2 d) toute valeur propre complexe d'une matrice antisymétrique à coefficients réels est imaginaire pure ;
- 3 e) $\det(M) \geq \det(S)$.
- 4) On suppose que la matrice M est orthogonale : $M \in O_n(\mathbb{R})$.
- 2 a) Montrer que $\text{Sp}(S) \subset [-1, +1]$.
- 1 b) Montrer que, si une valeur propre λ de S appartient à $] -1, +1[$, alors le sous-espace propre associé $E_\lambda(S)$ est de dimension paire.

PROBLÈME

La fonction zêta de Riemann est définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- 0,5 1) Déterminer l'ensemble de définition de ζ .

Les parties du problème à suivre sont indépendantes.

12

La fonction zêta alternée

On note $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1 2) Déterminer l'ensemble de définition de $F : x \mapsto F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. *$\sum f_n(x)$ cv si $n > 0$ 0,5
dv si $n \leq 0$ 0,5*
- 1 3) Déterminer la valeur de $F(1)$. *$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ si $x \in]-1, +\infty[$ 0,5 Théo. radical d'Abel*
- 2 4) Étudier la limite de F en $+\infty$. *1 cvu 1 Théo. double lim. on encadrement par TSA 2*
- 1 5) Soit $x > 0$. Montrer que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang. *0,5 $\ln$ cv 0,5 $\sum$ cv 0,5 $\sum$ cv 0,5 $\sum$ cv 0,5 $\sum$ cv 0,5*
- 3 6) Montrer que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $F'(1)$ comme la somme d'une série. *0,5*
- 0,5 7) Montrer que, pour tout $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = -2^{1-x}\zeta(x)$. *0,5 $F(x) \rightarrow F(1)$ car... $\zeta(x) \sim 0,5$*
- 1,5 8) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+ .
- 2 9) Montrer qu'il existe deux constantes α et β , qu'on exprimera en fonction de $F(1)$ et de $F'(1)$, telles que

$$\zeta(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \beta + o_{x \rightarrow 1^+}(1).$$

10

La loi de probabilité zêta

On note $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

- 1 10) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}. \quad \begin{matrix} \geq 0 & 0,5 \\ \sum_{n=1}^{\infty} = 1 & 0,5 \end{matrix}$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x , ce qu'on suppose désormais.

- 1,5 11) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ . *0,5 $\sum$ cv abs 0,5 $x > 2$ 0,5 $E(X) =$*
- 1,5 12) Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ . *0,5 $\sum$ cv 0,5 $x > k+1$ 0,5 $E(X^k) =$*
- 0,5 13) En déduire la variance de X pour tout $x > 3$. *König & Kugener 0,5*
- 1 14) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}$. *0,5 $\cup$ disjointe 0,5 $P(X \in a\mathbb{N}^*) =$*

Soit $(q_1, \dots, q_n)$ un n -uplet de nombres premiers distincts deux à deux.

- 2 15) Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \dots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont indépendants. *$\mathbb{I} \in \mathbb{I}(q_n) 0,5 + 1,5$*

Cela entraîne, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

- 1,5 16) Montrer que *1,5 Continuité 1 $\lim_{x \rightarrow 1^+}$*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

16

Un développement en série entière

On note $g_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > -1$.

17) Montrer que $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ est défini pour tout réel $x > -1$.

18) Montrer que, pour tout $x > -1$:

$$G(x+1) - G(x) = \frac{1}{1+x}.$$

19) Calculer $G(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et étudier la limite de la fonction G en $+\infty$. *0,5 G ↑ G(k) = ∑_{n=2}^k 1/n → ∞*

20) Montrer que la fonction G est continue sur $] -1, +\infty[$. *cvu sur]-1, 2] 0,5 + 0,5*

21) Déterminer un équivalent de $G(x)$ quand le réel x tend vers -1^+ . *G continue 1 ~ 1/(x+1) 1*

22) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $] -1, +\infty[$ et que $G^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1)$. *théor. 1 cvu 1*

23) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

α

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in] -1, 1[, \quad |G^{(k)}(x)| \leq k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right).$$

24) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in] -1, +1[$. On pose $R_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} G^{(k+1)}(t) dt$. Montrer que

$$|R_k(x)| \leq \left(A + \frac{1}{1+x} \right) |x|^{k+1}.$$

25) Montrer que la fonction G est développable en série entière sur $] -1, +1[$. *FTRI 1 R_k(x) → 0 1*

26) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$? *k → ∞*