

C O L L E N° 19

Intégrales à paramètre

Soit $F(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$.

1. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que

$$f(x, t) = \ln(x^2 - 2x \cos t + 1)$$

est défini pour $t \in [0, \pi]$.

2. Montrer que la fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

3. Soit $G(x) = \int_0^\pi \frac{1}{x^2 - 2x \cos t + 1} dt$.

En effectuant le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, montrer que

$$G(x) = \frac{\pi}{1 - x^2}$$

pour tout $x \in [0, 1[$.

4. En déduire $F'(x)$ et $F(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
5. Montrer que la fonction F est définie et continue en 1. En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos t) dt.$$