

THÈME 1 : SUITES & SÉRIES

Corrigé de l'exercice 4

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1.

Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, +1[$, $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$ qui n'est pas une série entière.

- 1) Démontrer que, pour tout $x \in]-1, +1[$, la série numérique $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

On note, pour tout $x \in]-1, +1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

- 2) Soit un réel $b \in]0, +1[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[-b, b]$.

En déduire que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $] -1, +1[$ et exprimer, pour tout $x \in] -1, +1[$, $f'(x)$ comme la somme d'une série.

- 3) En utilisant une série entière, déterminer la valeur ℓ de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- 4) Dans cette question, $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$.
- a) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
- b) Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +1[$, $h_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$. Montrer que la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, +1[$.
- c) En déduire, en fonction de ℓ , un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^- .

- 1) Pour tout $x \in]-1, +1[$, $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'où $1-x^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$ et $\frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |a_n x^n|$. Or le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 par hypothèse, donc la série $\sum |a_n x^n|$ converge et, par comparaison, la série $\sum \left| \frac{a_n x^n}{1-x^n} \right|$ converge aussi.
- 2) Soit $b \in]0, +1[$. Chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[-b, +b]$ et : $\forall x \in [-b, +b]$, $f'_n(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

La série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément (car normalement) sur $[-b, b]$. En effet $\forall x \in [-b, b]$, $|f'_n(x)| \leq \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ car $x^n \leq b^n < 1$, d'où $-1 < -b^n \leq -x^n$, d'où $0 < 1-b^n \leq 1-x^n$, d'où $0 \leq \frac{1}{1-x^n} \leq \frac{1}{1-b^n}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\frac{1}{(1-x^n)^2} \leq \frac{1}{(1-b^n)^2}$ car la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$. Or la série $\sum \frac{na_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ converge absolument car un équivalent de $\left| \frac{na_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \right|$ est $|na_n b^{n-1}|$ qui ne change pas de signe et le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à celui de $\sum na_n x^n$ car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence.

D'une part, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[-b, +b]$ d'après la question 1.

D'autre part, la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément comme il vient d'être prouvé.

Donc f est de classe C^1 sur $[-b, +b]$ et $\forall x \in [-b, +b]$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$. Ceci est vrai sur tout $[-b, b] \subset]-1, +1[$, donc encore vrai sur $] -1, +1[$.

- 3) Le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est 1 et

$$\forall x \in]-1, +1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

Or la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées car la suite des réels $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant. D'où, d'après le théorème radial d'Abel,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = -\ln(2).$$

- 4) a) De la question 2, on déduit que f est dérivable et que $f(0) = a_0 = 1$ et $f'(0) = a_1 = -1$. Doù $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$. Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$.

b) Soit $x \in [0, 1[$. La suite de réels $h_n(x)$:

- tend vers 0 car $0 \leq h_n(x) \leq \frac{x^n}{n x^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$;
- en décroissant car les deux suites $(x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et positives.

D'après le théorème des séries alternées, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k(x) \right| \leq |h_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ car $1+x+x^2+\dots+x^{n-1} \geq x^n+x^n+x^n+\dots+x^n = (n+1)x^n$.

Or $\frac{1}{n+1}$ est un majorant et le *sup* est le plus petit majorant. D'où $\sup_{x \in [0, 1[} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où la suite des restes converge vers 0 uniformément sur $[0, 1[$, donc la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.

c) Pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x).$$

Or $h_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$, d'où (théorème de la double limite) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'où $(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\ln(2)$. Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}$.