

THÈME 1 : SUITES & SÉRIES

Corrigé de l'exercice 5

Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ pour tout $x > -1$. $\triangleright$ **TD13.4**

1) Soit n un entier. Montrer que $f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. $\triangleright$ **DS5*2024-2025.3q1c**

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $D_n = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin t))^n dt$ est convergente.

3) Montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du.$$

5) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$ converge et calculer sa valeur.

6) En déduire que

$$D_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (-1)^n n!$$

7) Soient $x > -1$ et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f_n(t) = \frac{(\ln(\sin t))^n}{n!} x^n.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

8) Prouver que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et donner son développement en série entière.

9) En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

1) $\triangleright$ **DS5*2024-2025.3q1c**

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale D_n est impropre en 0 et, quand $t \rightarrow 0^+$, $\sqrt{\sin t} (\ln(\sin t))^n \rightarrow 0$ par croissances comparées. Et $\sin(t) \sim t$, donc $\sqrt{t} (\ln(\sin t))^n \rightarrow 0$. D'où $(\ln(\sin t))^n = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$. Or $\frac{1}{t^{1/2}}$ ne change pas de signe et l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^{1/2}} dt$ est convergente d'après le critère de Riemann.

Ainsi

l'intégrale D_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Il donne $D_1 = -\int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi/2 - u)) du = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u) du$. Puis, en effectuant le changement de variable $u = 2t$, lui aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone,

$$2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Enfin le changement de variable $u = \pi - t$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone donne

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = -\int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt,$$

d'où $2D_1 = \frac{2}{2} D_1 - \frac{\pi \ln 2}{2}$. Donc

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante (par composition) de $]0, \pi/2[$ vers $]0, +\infty[$ car $-\ln(\sin(\pi/2)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln(\sin(t))) = +\infty$. On effectue alors le changement de variable $u = -\ln(\sin(t)) : du = \frac{-\cos(t)}{\sin(t)} dt$ et, pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\cos(t) > 0$, d'où $\frac{\sin(t)}{-\cos(t)} = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \frac{-e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2u}-1}}$ et $D_n =$

$$\int_{+\infty}^0 (-u)^n \frac{-du}{\sqrt{e^{2u}-1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du, \text{ donc } (-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du$$

5) L'intégrale $K_i = \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt$ est impropre en $+\infty$. Elle est convergente car la fonction $t \mapsto t^i e^{-t}$ est continue et $t^i e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe au voisinage de $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

On montre par récurrence sur i que $K_i = i!$:

- $K_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
- Supposons que $K_i = i!$ pour un entier $i \in \mathbb{N}$ et intégrons par partie : $K_{i+1} = \int_0^{+\infty} uv' dt$ et les fonctions $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto t^{i+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où $K_{i+1} = [-t^{i+1}e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (i+1)t^i e^{-t} dt = (i+1)K_i$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{i+1}e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

D'où $K_{i+1} = (i+1) \cdot i! = (i+1)!$.

- Donc $K_i = i!$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

6) On va prouver que $(-1)^n D_n - n! = o(n!)$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} (-1)^n D_n - n! &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}} - \frac{1}{e^u} \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{e^u - \sqrt{e^{2u}-1}}{e^u \sqrt{e^{2u}-1}} \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u \sqrt{e^{2u}-1} (e^u + \sqrt{e^{2u}-1})} du. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|(-1)^n D_n - n!| \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u (e^{2u}-1)} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u (2u)} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{(n-1)!}{2}$$

en ayant utilisé l'inégalité de convexité : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $e^t - 1 \geq t > 0$. Or $(n-1)! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$, donc

$$D_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (-1)^n n!$$

7) On sait que la série entière $\sum \frac{u^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$. En posant $u = x \ln(\sin(t))$, la série numérique $\sum f_n(t)$ converge donc pour tout $t \in]0, \pi/2[$. De $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = e^u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on tire que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = e^{x \ln(\sin(t))} = (\sin(t))^x$ pour tout $t \in]0, \pi/2[$. Donc

la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, \pi/2[$ et $\forall t \in]0, \pi/2[$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = (\sin(t))^x$.

8) Soit $x > -1$: $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(\sin(t)))^n}{n!} x^n dt$. Sous réserve qu'on puisse intervertir $\sum$ et $\int$, on obtiendra que : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(\ln(\sin(t)))^n}{n!} x^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ et on aura ainsi développé en série entière la fonction f .

Supposons que $x \in]-1, +1[$. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque [▷ théorème 16 du chapitre VII](#) :

- Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $]0, \pi/2[$ car, d'après la question 2, l'intégrale D_n est convergente et même absolument convergente car la fonction f_n ne change pas de signe ;
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, \pi/2[$ d'après la question 7 ;
- La série de réels $\sum \int_0^{\pi/2} |f_n(t)| dt$ converge car, la fonction f_n ne changeant pas de signe, $\int_0^{\pi/2} |f_n(t)| dt = \left| \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt \right| = \left| \frac{D_n}{n!} x^n \right| \sim |x^n|$ d'après la question 6 et la série géométrique $\sum |x|^n$ converge car $|x| < 1$.

Donc la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt$. Donc

la fonction f est développable en série entière sur $] -1, +1[$ et $\forall x \in] -1, +1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$

9) Parce que la fonction f est *DSE* sur $] -1, +1[$, elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier,

f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{D_1}{1!} = -\frac{\pi \ln 2}{2}$

d'après la question 3.