

K D O D U 13 / 03 / 2026

Équa. diff., matrice antisymétrique & exponentielle

- 1) Soient deux réels $\omega > 0$ et $V > 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les deux systèmes d'équations différentielles

$$(E) \begin{cases} x' = -\omega \cdot y \\ y' = +\omega \cdot x \end{cases} \quad \text{et} \quad (F) \begin{cases} x' = -\omega \cdot y \\ y' = +\omega \cdot x \\ z' = V \end{cases}.$$

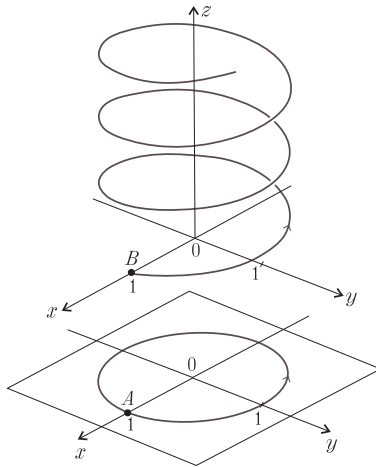


FIGURE 1 – Deux trajectoires : un cercle et une hélice

- 2) Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $\vec{\omega}$ un vecteur non nul de E . On définit les deux fonctions

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|^2 \quad \text{et} \quad g : E \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle.$$

Soit $M : I \rightarrow E$, $t \mapsto M(t)$ une solution sur I de l'équation différentielle $\vec{x}'(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}(t)$. Montrer les deux fonctions $f \circ M$ et $g \circ M$ sont constantes sur I . Qu'en déduire ?

- 3) Soit un entier n impair. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$: $A^T = -A$.

- a) Montrer que A n'est pas inversible et que, pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X = 0$.
- b) Soit $M : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $t \mapsto M(t)$ une solution sur I de l'équation différentielle $X'(t) = A \cdot X(t)$. Montrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $\Omega \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que les fonctions

$$t \mapsto M(t)^T \cdot M(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \Omega^T \cdot M(t)$$

sont constantes sur I . Qu'en déduire ?

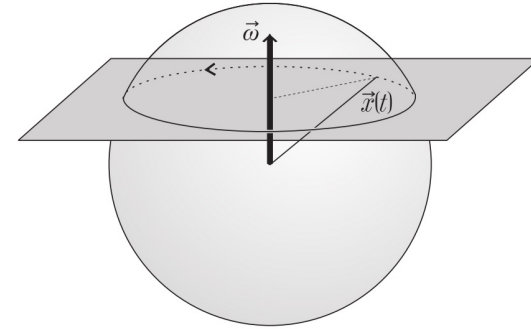


FIGURE 2 – Une trajectoire à l'intersection d'une sphère et d'un plan