

F E U I L L E D E T . D . N° 1 5

Calcul différentiel

Exercice 1 (Dériver suivant un vecteur). Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient un ouvert $U \subset E$, un point $a \in U$ et un vecteur $v \in E$. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow F$ est dérivable en le point a suivant le vecteur v si le vecteur

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe. On note alors ce vecteur $D_v f(a)$ et on l'appelle la dérivée de f en a suivant v .

1. Montrer que : si f est dérivable en a suivant tout vecteur v , alors f admet des dérivées partielles en a .
2. Soit $g(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$.
 - (a) Montrer que la fonction g n'est pas continue en $(0, 0)$.
 - (b) Montrer que g est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur (x, y) .
3. Montrer que : si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a suivant tout vecteur v et

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v.$$

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de E , a un élément de U et deux fonctions

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : E \rightarrow E.$$

différentiables en a . Montrer que la fonction

$$\lambda f : E \rightarrow E, x \mapsto \lambda(x)f(x)$$

est différentiable en a et que

$$d(\lambda f)(a) = f(a)d\lambda(a) + \lambda(a)df(a).$$

Exercice 3 (Le gradient en coordonnées cylindriques). La fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

change les coordonnées cylindriques (r, φ, z) en coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

1. Calculer la matrice jacobienne $J_f(r, \varphi, z)$.
2. Représenter sur un dessin les coordonnées cylindriques (r, φ, z) d'un point M et les trois vecteurs colonnes de la jacobienne.
3. Exprimer le gradient en coordonnées cylindriques.

Exercice 4. Soit U et V les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \quad \text{et} \quad V = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}.$$

1. Représenter sur deux figures les ensembles U et V .
2. Montrer que U et V sont des ouverts de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que : si $(x, y) \in U$, alors $(x + y, xy) \in V$.
4. Montrer que la fonction $f : U \rightarrow V$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est bijective et calculer $f^{-1}(s, p)$ pour chaque $(s, p) \in V$.
5. En utilisant le changement de coordonnées f , déterminer toutes les fonctions g de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall x < y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 3(y - x)g.$$

Exercice 5 (Différentielle de l'inversion).

Soit $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) En se rappelant la comatrice, montrer que l'application $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{ij}) \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. (a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrer que :

$$(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij} + o(t)$$

et en déduire $df(I_n) \cdot E_{ij}$.

- (b) Calculer $df(I_n) \cdot H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - H + o(H).$$

- (c) Soit une matrice inversible A . Montrer que

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(H)$$

et en déduire $df(A) \cdot H$.

3. (a) Soit une application $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ différentiable en A .
Montrer que l'application $G : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M \cdot g(M)$ est aussi différentiable en A et calculer $dG(A) \cdot H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) Retrouver ainsi l'expression de $df(A) \cdot H$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est stochastique ([▷ TD n° 4 exo 8 & TD n° 6 exo 6](#)) si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

2. [▷ exo 7 de l'annexe C](#). Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (i.e. fermée et bornée) mais pas connexe par arcs de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte et connexe par arcs de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Exercice 7.

1. Déduire de la concavité de la fonction $\ln$ que :

$$\forall (a, b, c) \in]0, +\infty[^3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

2. On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par : $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$. Préciser, pour chaque extremum local de la fonction f , si c'est un maximum ou un minimum et s'il est global.

Exercice 8. Soient une matrice carrée $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, une matrice colonne $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et un réel $c \in \mathbb{R}$. On note E l'evn $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on définit la fonction

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^T A x - 2b^T x + c.$$

1. Montrer que f est différentiable sur E et que, pour tout $x \in E$:

$$\forall h \in E, df(x) \cdot h = 2(Ax - b)^T h.$$

2. Etudier les extrema de la fonction f .

Exercice 9. Soient un entier $n \geq 2$ et une fonction f continue de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{0\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet un extremum global. Que dire si $n = 1$?

Exercice 10. Soient S la surface d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Montrer que la surface S est bornée.
2. Déterminer trois plans de symétrie de la surface S .
3. Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in S$, $x + y + z \leq 1$. En déduire que la surface S est à l'intérieur d'un tétraèdre. Représenter graphiquement la surface S et ce tétraèdre.
4. Soit $A(a, b, c)$ un point de la surface S tel que ni a , ni b , ni c n'est nul. Quelle est l'équation du plan $P(a, b, c)$ tangent à la surface S au point A ?
5. On note x_0 , y_0 et z_0 les trois réels tels que le plan $P(a, b, c)$ coupe l'axe des x en $x = x_0$, l'axe des y en $y = y_0$ et l'axe des z en $z = z_0$. Calculer $x_0 + y_0 + z_0$ et montrer que cette somme ne dépend pas de (a, b, c) .