

Colle 20 Variables aléatoires

AUBRIL Matthieu

Exercice 1.

1. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :
pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$.
 - (a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
 - (b) Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.
 - (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution 1.

1. Notons $u_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$ pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

On a : - $u_{i,j} = u_{j,i} \geq 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$; - pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} u_{i,j}$ converge. En effet, on a (sous réserve de convergence de chacune des séries utilisées) :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+j}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^{i+j}} = \frac{i}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^j}$$

et on reconnaît là des séries convergentes. Au passage, on obtient $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \frac{i+1}{2^{i-1}} = 4u_{i,1}$ (en utilisant les calculs du préambule) ; - la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right)$ converge, car pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = 4u_{i,1}$ par ce qui précède et parce que $\sum_{i \geq 0} u_{i,1}$ converge (et elle a même somme que $\sum_{i \geq 0} u_{1,i}$ par symétrie). On obtient concrètement : $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} 4u_{i,1} = 4 \sum_{i=0}^{+\infty} u_{1,i} = 4 \times 4 \times u_{1,1} = 16u_{1,1}$. On en déduit, par le théorème de sommation par paquets pour les familles à termes positifs, que la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, et sa somme vaut :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = 16 \times u_{1,1} = \frac{16 \times 2}{2^2} = 8$$

2. (a) Les relations données définissent bien une loi de probabilité sur l'univers dénombrable $\mathbb{N}^2$, puisque : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{u_{i,j}}{8} \geq 0$; et $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{1}{8} \underbrace{\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}}_{=8} = 1$.

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a la décomposition d'événement :

$$(X = i) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} ((X = i) \cap (Y = j)),$$

et cette réunion est disjointe, donc

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{i,j}}{8}.$$

De même, on a

$$P(Y = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = j) \cap (Y = i)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{j,i}}{8} = P(X = i),$$

puisque $u_{i,j} = u_{j,i}$. Les variables aléatoires X et Y suivent donc la même loi, donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = P(Y = k) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{u_{k,l}}{8} = \frac{4u_{k,1}}{8} = \frac{1}{2} u_{k,1} = \frac{k+1}{2^{k+2}}$$

(c) On a d'après l'énoncé :

$$P((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{0+0}{2^{0+0+3}} = 0$$

Pourtant $P(X = 0) \times P(Y = 0) = \frac{0+1}{2^{1+2}} \times \frac{0+1}{2^{1+2}} = \frac{1}{16} \neq P((X = 0) \cap (Y = 0))$, donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

LEREMON Erwan

Exercice 2. Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité P . Si X est une variable aléatoire réelle, on dit que X est symétrique si X et $-X$ suivent la même loi.

1. Soient Y et Y' deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi. Montrer que $Y - Y'$ est symétrique.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose $f_X : t \mapsto E(e^{itX})$. Montrer que f_X détermine entièrement la loi de X . Si X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donner une condition nécessaire et suffisante sur f_X pour que X soit symétrique.

Solution 2.

1. Notons $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\} = Y'(\Omega)$. Comme Y et Y' sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(Y - Y' = z_k) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(Y' = y_i) \mathbf{P}(Y = z_k + y_i)$$

Comme Y et Y' ont même loi,

$$\mathbf{P}(Y - Y' = z_k) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(Y = y_i) \mathbf{P}(Y' = z_k + y_i) = \mathbf{P}(Y' - Y = z_k)$$

donc $Y - Y'$ est symétrique.

2. Si $X(\Omega) = \mathbf{Z}$, comme $|e^{itk} \mathbf{P}(X = k)| = \mathbf{P}(X = k)$ et comme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$$

la famille $(e^{itk} \mathbf{P}(X = k))_{k \in \mathbf{Z}}$ est sommable. La fonction

$$f_X : t \mapsto E(e^{itX}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{itk} \mathbf{P}(X = k)$$

est définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_X(t) e^{-ikt} dt$$

et l'on pourra dire que la fonction f_X détermine entièrement la loi de X . La série de fonctions $\sum u_k$ où $u_n(t) = e^{it(t-k)} \mathbf{P}(X = n)$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On déduit du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_X(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} dt = \mathbf{P}(X = k)$$

Si X est symétrique, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X = -k)$ d'où, pour $t \in \mathbf{R}$:

$$f_X(t) = \mathbf{P}(X = 0) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \cos(kt).$$

La fonction f_X est paire.

Réciproquement, si f_X est paire,

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \mathbf{P}(X = -k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_X(t) e^{ikt} dt$$

car $t \mapsto f_X(t) e^{ikt}$ est 2π -périodique. Le changement de variable $u = -t$ donne : $\mathbf{P}(X = -k) = \mathbf{P}(X = k)$ et X est symétrique.

ONTEIRAL-DIAZ Tom

Exercice 3. Un péage comporte 3 voies et n voitures se présentent en choisissant aléatoirement et indépendamment une voie. On note X_i le nombre de voitures qui passent par la voie i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

- a) Déterminer la loi des X_i .
- b) Calculer $\mathbb{V}(X_1)$, $\mathbb{V}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$. En déduire $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
- c) Les variables X_1, X_2, X_3 sont-elles indépendantes deux à deux ? mutuellement indépendantes ?

Solution 3. Notons que $X_1 + X_2 + X_3 = n$, le nombre total de voitures.

1. Considérons la variable X_1 (le raisonnement est identique pour X_2 et X_3). Chaque voiture k (pour $k = 1, \dots, n$) choisit la voie 1 avec une probabilité $p = 1/3$, indépendamment des autres voitures. On peut voir le passage de chaque voiture comme une épreuve de Bernoulli : succès si la voiture choisit la voie 1 (proba $p = 1/3$), échec sinon (proba $1 - p = 2/3$). La variable X_1 compte le nombre de succès (voitures choisissant la voie 1) au cours des n épreuves indépendantes. Par définition, X_1 suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 1/3$.

$$X_1 \sim \mathcal{B}(n, 1/3)$$

De même, $X_2 \sim \mathcal{B}(n, 1/3)$ et $X_3 \sim \mathcal{B}(n, 1/3)$. La fonction de masse est :

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{2^{n-k}}{3^n} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n$$

2. La variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $np(1 - p)$. Donc, pour X_1 et X_2 qui suivent $\mathcal{B}(n, 1/3)$:

$$\mathbb{V}(X_1) = n \left(\frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$$

$$\mathbb{V}(X_2) = \frac{2n}{9}$$

Considérons la somme $Y = X_1 + X_2$. On utilise la relation $X_1 + X_2 + X_3 = n$, soit $X_1 + X_2 = n - X_3$. Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(n - X_3) = \mathbb{V}(-X_3) = (-1)^2 \mathbb{V}(X_3) = \mathbb{V}(X_3)$$

Comme $X_3 \sim \mathcal{B}(n, 1/3)$, sa variance est $\mathbb{V}(X_3) = 2n/9$. Donc,

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2n}{9}$$

On utilise la formule de la variance d'une somme :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

En substituant les valeurs calculées :

$$\frac{2n}{9} = \frac{2n}{9} + \frac{2n}{9} + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$0 = \frac{2n}{9} + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}$$

3. On sait que si deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, alors leur covariance est nulle. Ici, $\text{Cov}(X_1, X_2) = -n/9$. Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$, la covariance est non nulle. Par conséquent, X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes. Par symétrie, (X_1, X_3) et (X_2, X_3) ne sont pas non plus indépendantes. Les variables ne sont pas indépendantes deux à deux, donc encore moins mutuellement indépendantes.

XXX

Exercice 4. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω et à valeurs dans $\{1, \dots, n+1\}$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$

$$a_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j).$$

On suppose que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } |i + j - (n+2)| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que la famille $(a_{i,j})$ ainsi définie est bien une loi de probabilité de couple.
2. Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $a_{i,j}$. Vérifier que A est diagonalisable.
3. Déterminer les lois de probabilité de X et Y .
4. Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$, on pose :

$$b_{i,j} = \mathbb{P}(X = i | Y = j).$$

Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $b_{i,j}$. Montrer que le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = n+1) \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de B .

Solution 4. 1. Tous les scalaires $a_{i,j}$ sont positifs ou nuls. Comptons le nombre de $a_{i,j}$ non nuls. Ce sont les termes pour lesquels :

- soit $i + j = n + 3$, avec $1 \leq i, j \leq n + 1$, soit les couples de la forme $(i, n + 3 - i)$ avec $1 \leq i, n + 3 - i \leq n + 1$ qui donne $2 \leq i \leq n + 1$. Il y a donc n tels termes.
- soit $i + j = n + 1$, avec $1 \leq i, j \leq n + 1$, soit les couples de la forme $(i, n + 1 - i)$ avec $1 \leq i, n + 1 - i \leq n + 1$ qui donne $1 \leq i \leq n$. Il y a encore n tels termes.

Au total, il y a $2n$ termes, et comme chacun vaut $1/2n$, la somme fait bien 1.

2. La matrice de A a la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1/2n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1/2n & 0 & 1/2n \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ 1/2n & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1/2n & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est symétrique réelle, donc diagonalisable.

3. La loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j}$. On trouve :

- $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = n + 1) = 1/2n$.
- $\mathbb{P}(X = i) = 1/n$ si $2 \leq i \leq n$.

Matriciellement, cela signifie qu'on a fait la somme sur chaque ligne de A . Par symétrie, Y suit la même loi que X .

4. On a, pour tout $1 \leq i, j \leq n + 1$,

$$b_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\mathbb{P}(Y = j)}.$$

- $b_{1,j} \neq 0$ si et seulement si $j = n$, et dans ce cas $b_{1,n} = 1/2$.
- $b_{n+1,j} \neq 0$ si et seulement si $j = 2$, et dans ce cas $b_{n+1,2} = 1/2$.
- pour $2 \leq i \leq n$, $b_{i,j} \neq 0$ si et seulement si $j = n + 3 - i$ ou $j = n + 1 - i$. Donc :

$$\begin{cases} b_{2,n+1} &= 1 & b_{i,n+3-i} &= 1/2 \\ b_{n,1} &= 1 & b_{i,n+1-i} &= 1/2. \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que v est vecteur propre pour la valeur propre 1.