

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 19

Intégrales à paramètre

13 mars 2026

Soit $F(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$.

1. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que

$$f(x, t) = \ln(x^2 - 2x \cos t + 1)$$

est défini pour $t \in [0, \pi]$.

2. Montrer que la fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

3. Soit $G(x) = \int_0^\pi \frac{1}{x^2 - 2x \cos t + 1} dt$.

En effectuant le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, montrer que

$$G(x) = \frac{\pi}{1 - x^2}$$

pour tout $x \in [0, 1[$.

4. En déduire $F'(x)$ et $F(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
 5. Montrer que la fonction F est définie et continue en 1. En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos t) dt.$$

1. Soit $(x, t) \in [0, 1[\times [0, \pi]$: $-1 \leq \cos t \leq +1$, d'où $-2x \leq -2x \cos t \leq +2x$, donc

$(1 - x)^2 = x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 2x \cos t + 1 \leq x^2 + 2x + 1 = (1 + x)^2$. D'où $(1 - x)^2 \leq x^2 - 2x \cos t + 1 \leq (1 + x)^2$. En particulier $0 < x^2 - 2x \cos t + 1$, donc le réel $f(x, t)$ est bien défini.

2. Soient $a \in]0, 1[$, $X = [0, a] \subset [0, 1[$ et $T = [0, \pi]$.

(i) Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur X car (*)

(ii) Pour chaque $x \in X$, $\begin{cases} t \mapsto f(x, t) \text{ est cpm et intégrable sur } T \text{ car } (**) \\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est cpm sur } T \end{cases}$

(iii) Pour tout $(x, t) \in X \times T$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ (***) et $\int_T \varphi(t) dt$ converge (****)

D'où la fonction $F : x \mapsto \int_0^\pi f(x, t) dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$. Ceci est vrai pour tout $[0, a] \subset [0, 1[$, donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et

$$\forall x \in [0, 1[, F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

(*) la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x - 2 \cos t}{x^2 - 2x \cos t + 1}$ est continue sur X .

(**) la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est définie d'après la question 1 et continue (donc cpm) car $\ln$ et $\cos$ sont continues. En outre, l'intégrale $\int_T |f(x, t)| dt$ n'est même pas impropre : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$.

(***) avec $\varphi(t) = \frac{2a+2|\cos t|}{(1-a)^2}$: en effet $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{2x - 2\cos t}{x^2 - 2x\cos t + 1} \right|$. Or $|2x - 2\cos t| \leq 2|x| + 2|\cos t|$. Et $|x^2 - 2x\cos t + 1| \geq (1-x)^2 \geq (1-a)^2$ comme prouvé à la question 1.

(***) L'intégrale $\int_T \varphi(t) dt$ n'est même pas impropre : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$.

3. On pose le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ qui $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[0, \pi[$ (ne pas oublier d'ouvrir en π car u n'y est pas défini, ce qui va rendre l'intégrale impropre) : $du = \frac{1}{2}(1+u^2)dt$ et $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 2\cos^2 \frac{t}{2} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. D'après la question 1, l'intégrale $G(x)$ est convergente, d'où :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1} \frac{2}{1+u^2} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2(x+1)^2 + (x-1)^2} du = \frac{2}{1-x^2} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{1+x}{1-x} u \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{1-x^2}.$$

4. D'après la question 2, $F'(0) = -2 \int_0^\pi \cos t dt = 0$ et, si $x \in]0, 1[$:

$$xF'(x) = \int_0^\pi \frac{2x^2 - 2x\cos t}{x^2 - 2x\cos t + 1} dt = \int_0^\pi \frac{(x^2 - 2x\cos t + 1) + (x^2 - 1)}{x^2 - 2x\cos t + 1} dt = \pi + (x^2 - 1) \cdot G(x), \text{ donc } F'(x) = \frac{\pi + (x^2 - 1) \cdot G(x)}{x}.$$

D'où $F'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, or $[0, 1[$ est un intervalle, donc la fonction F est constante sur $[0, 1[$. Or $F(0) = \int_0^\pi \ln(1) dt = 0$. Donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$.

5. F est définie en 1 si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^\pi \ln(2 - 2\cos t) dt$ converge. Cette intégrale est impropre en 0.

Or $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + t^2\varepsilon(t)$, d'où $2 - 2\cos t = t^2 + t^2\varepsilon(t)$ et $\ln(2 - 2\cos t) = 2\ln t + \ln(1 + \varepsilon(t))$.

L'intégrale $\int_0^\pi \ln t dt$, impropre en 0, converge car $\int_a^\pi \ln t dt = [t \ln t - t]_a^\pi = \pi \ln \pi - \pi - a \ln a + a \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \pi \ln \pi - \pi$. Et l'intégrale $\int_0^\pi \ln(1 + \varepsilon(t)) dt$ n'est même pas impropre en 0. Donc la fonction F est définie en 1. (À noter que le théorème suivant va démontrer que F est définie sur $[0, 1]$, donc *a fortiori* en 1, ce qui rendra inutile ce qui précède.)

Soient $X = [0, 1]$ et $T =]0, \pi[$. (Ne pas oublier d'ouvrir en 0 car l'intégrale est impropre en 0 dans le cas où $x = 1$, or ce cas n'est pas exclu, contrairement à la question 2.)

- (i) Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X .
- (ii) Pour chaque $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est *cpm* sur T .
- (iii) Pour tout $(x, t) \in X \times T$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ($\heartsuit$) et $\int_T \varphi(t) dt$ converge car ($\heartsuit\heartsuit$).

D'où la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$ est définie et continue sur $[0, 1]$. Et en particulier en 1, d'où : $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0. \text{ Or } F(1) = \int_0^\pi \ln(2 - 2\cos t) dt = \pi \ln 2 + \int_0^\pi \ln(1 - \cos t) dt. \text{ Donc } \boxed{\int_0^\pi \ln(1 - \cos t) dt = -\pi \ln 2.}$$

($\heartsuit$) $\sin^2 t \leq x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t \leq (|x| + |\cos t|)^2 + \sin^2 t \leq (1 + 1)^2 + 1 \leq 5$, d'où $2\ln \sin t \leq f(x, t) \leq \ln 5$ par croissance du logarithme, donc $|f(x, t)| \leq \max(-2\ln \sin t, \ln 5) \leq \ln 5 - 2\ln \sin t = \varphi(t)$.

($\heartsuit\heartsuit$) L'intégrale $\int_T \varphi(t) dt$, impropre en 0 et en π , converge. En effet, l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \varphi$ converge car $\ln \sin t = \ln(t + t\varepsilon(t)) = \ln(t) + \ln(1 + \varepsilon(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln t dt$, qui est impropre en 0, converge. Et, de même, l'intégrale $\int_{\pi/2}^\pi \varphi$ converge.