

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 14

Couples de variables aléatoires

13 mars 2026

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2 . Montrer que la probabilité de l'événement $(X = Y)$ vaut $\frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.

X et Y suivent des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 , d'où $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p_1)^{k-1} p_1 \quad \text{et} \quad P(Y = k) = (1 - p_2)^{k-1} p_2.$$

L'événement $(X = Y)$ est égal à $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = k \cap Y = k)$ et cette union est disjointe, donc

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 p_2 [(1 - p_1)(1 - p_2)]^{k-1} \quad \text{car les v.a. } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes par hypothèse} \\ &= p_1 p_2 \cdot \frac{1}{1 - [(1 - p_1)(1 - p_2)]} = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \end{aligned}$$

Exercice 2 (Oral Mines Ponts PC 2016). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \dots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on pioche une boule de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne, Y la variable aléatoire donnant le numéro de la boule choisie.

1. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y) et montrer que l'espérance de Y vaut $\frac{n+3}{4}$.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

1. L'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est $(X, Y)(\Omega) = \{(k, i) \in (\mathbb{N}^*)^2, 1 \leq i \leq k \leq n\}$ et, pour $1 \leq i \leq k \leq n$:

$$\mathbb{P}(X = k, Y = i) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{k}$$

car, par équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{k}$. On en déduit la loi marginale de Y : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(Y = i) = \bigcup_{k \in \llbracket i, n \rrbracket} (X = k \cap Y = i)$ et cette union est disjointe, d'où

$$\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{k=i}^n \mathbb{P}(X = k, Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k}$$

et la variable aléatoire Y est d'espérance finie car $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ est un ensemble fini $\triangleright$ Remarque X.18. De plus,

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n i \times \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k \frac{i}{nk} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nk} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (k+1) = \frac{n+3}{4}.$$

2. Si $n = 1$, alors les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes. Sinon, elles ne le sont pas car

$$\mathbb{P}(X = n, Y = 1) = \frac{1}{n^2} \quad \text{diffère de} \quad \mathbb{P}(X = n) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Exercice 3 (d'après Banque PT, 2015 A). Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est :

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } 0 \leq i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées telles que $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Montrer que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
3. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Soit $Z = X - Y$. Montrer que la variable aléatoire Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
5. Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^i P(X = i, Y = j) \quad \text{car } P(X = i, Y = j) = 0 \text{ si } i < j \\ &= \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\ &= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^i \frac{i! \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\ &= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \quad \text{car } [\alpha + (1 - \alpha)]^i = 1. \end{aligned}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=j}^{\infty} P(X = i, Y = j) \quad \text{car } P(X = i, Y = j) = 0 \text{ si } i < j \\ &= \frac{\alpha^j e^{-\lambda}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+j} (1 - \alpha)^k}{k!} \\ &= \frac{\alpha^j e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1 - \alpha)]^k}{k!} \\ &= \frac{\alpha^j e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} e^{\lambda(1-\alpha)} \\ &= e^{-\alpha\lambda} \frac{(\alpha\lambda)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha\lambda)$.

3. Les v.a. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $\forall i, \forall j, P(X = i, Y = j) = P(X = i) \times P(Y = j)$. Un contre-exemple suffit pour montrer qu'elles ne sont pas indépendantes, le voici :

$$P(X = 0, Y = 0) = e^{-\lambda} \quad , \quad P(X = 0) = e^{-\lambda} \quad \text{et} \quad \times P(Y = 0) = e^{-\alpha\lambda},$$

d'où $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \times P(Y = 0)$.

4. $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 P(Z = k) &= \sum_{i-j=k} P(X = i, Y = j) \\
 &= \frac{(1-\alpha)^k}{k!} \sum_{i-j=k} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\
 &= \frac{(1-\alpha)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i-j=k} \frac{\lambda^i \alpha^j}{j!} \\
 &= \frac{(1-\alpha)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+k} \alpha^j}{j!} \\
 &= \frac{(1-\alpha)^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda \alpha)^j}{j!} \\
 &= \frac{[(1-\alpha)\lambda]^k}{k!} e^{-(1-\alpha)\lambda}
 \end{aligned}$$

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{P}((1-\alpha)\lambda)$.

5. Soit $(j, k) \in \mathbb{N}^2$: l'événement $(Y = j) \cap (Z = k)$ est égal à $(X = j+k) \cap (Y = j)$,

d'où $P(Y = j, Z = k) = P(X = j+k, Y = j) = \frac{\lambda^{j+k} e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^k}{j!k!}$ par définition de la loi conjointe car $j \leq j+k$.

Par ailleurs,
$$\begin{cases} P(Y = j) = e^{-\alpha\lambda} \frac{(\alpha\lambda)^j}{j!} & \text{d'après la question 2} \\ P(Z = k) = \frac{[(1-\alpha)\lambda]^k}{k!} e^{-(1-\alpha)\lambda} & \text{d'après la question 4} \end{cases}$$

D'où $P(Y = j, Z = k) = P(Y = j) \times P(Z = k)$ et c'est vrai pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, donc les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4.

Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $p_n \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X_n telle que $P(X_n = 1) = p_n$ et $P(X_n = 0) = 1 - p_n$. On suppose que ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes.

- Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et montrer que cette variance est inférieure ou égale à $\frac{1}{4n}$.
- En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

- Les variables aléatoires X_n sont bornées et il en est donc de même de la variable aléatoire Z_n^2 qui possède donc une espérance [▷ Remarque X.18](#). La v.a. Z_n possède donc une espérance et une variance [▷ Proposition-définition X.26](#). Pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $E(X_k) = 0 \times P(X_k = 0) + 1 \times P(X_k = 1) = p_k$ et

$V(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 0^2 \times P(X_k = 0) + 1^2 \times P(X_k = 1) - [E(X_k)]^2 = p_k - p_k^2 = p_k \cdot (1 - p_k)$. D'où

$$\begin{aligned}
 E(Z_n) &= \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} && \text{par linéarité de l'espérance} \\
 &= \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 V(Z_n) &= \frac{V(X_1 + \dots + X_n)}{n^2} \\
 &= \frac{V(X_1) + \dots + V(X_n)}{n^2} \quad \text{car les v.a. } X_1, \dots, X_n \text{ sont deux à deux indépendantes} \\
 &= \frac{p_1(1-p_1) + \dots + p_n(1-p_n)}{n^2} \\
 &\leq \frac{\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}{n^2} \\
 &\leq \frac{1}{4n}.
 \end{aligned}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$: d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$, d'où

$$1 \geq 1 - P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Exercice 5. Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $p \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les valeurs prises par la v.a. X sont affichées par un compteur un tantinet déréglé :

- si la v.a. X prend une valeur non nulle, alors il affiche correctement cette valeur ;
- si la v.a. X prend la valeur 0, alors il affiche au hasard et de manière équiprobable une valeur de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit Y la v.a. prenant la valeur affichée par le compteur.

1. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
2. Montrer que les v.a. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $n = 1$
3. Déterminer l'espérance de Y et l'espérance de XY .
4. En déduire la covariance de (X, Y) . Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de $p \in]0, 1[$ qui la rendent nulle.

1. Pour connaître la loi marginale de Y , on peut calculer la loi conjointe du couple (X, Y) , c'est-à-dire $P(X = j, Y = k)$ pour chaque $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour simplifier, on peut se contenter de calculer d'une part :

$$P(X = 0, Y = k) = P((X = 0) \cap (Y = k)) = P(X = 0) \cdot P_{(X=0)}(Y = k) = (1-p)^n \cdot \frac{1}{n}$$

d'après la formule des probabilités composées. Et de remarquer d'autre part que l'événement $(X \neq 0) \cap (Y = k)$ est égal à $(X = k)$, d'où :

$$P((X \neq 0) \cap (Y = k)) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

car $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Enfin l'événement $(Y = k)$ est l'union disjointe des événements $(X = 0) \cap (Y = k)$ et $(X \neq 0) \cap (Y = k)$, donc :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Y = k) &= P((X = 0) \cap (Y = k)) + P((X \neq 0) \cap (Y = k)) \\
 &= (1-p)^n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

2. Si $n \geq 2$, alors on veut montrer que :

$$\exists (j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = i, Y = j) \neq P(X = i) \cdot P(Y = j).$$

Effectivement : $P(X = n, Y = 1) = 0$ (car l'événement est impossible) tandis que ni $P(X = n)$ ni $P(Y = 0)$ n'est nul. Donc les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes.

Par contre, si $n = 1$, alors on vérifie d'une part que :

$$1 - p = P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0) \text{ car } P(X = 0) = 1 - p \text{ et } P(Y = 1) = 1.$$

Et d'autre part que :

$$p = P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \cdot P(Y = 1) \text{ car } P(X = 1) = p \text{ et } P(Y = 1) = 1.$$

3. La v.a. Y possède une espérance car $Y(\Omega)$ est fini :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=1}^n kP(Y=k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k(1-p)^n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= (1-p)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{car le terme } k=0 \text{ ne contribue pas à la somme} \\
 &= \frac{n+1}{2} \cdot (1-p)^n + E(X) \quad \text{car la deuxième somme est l'espérance de } X \\
 &= \frac{n+1}{2} \cdot (1-p)^n + np \quad \text{car } X \text{ suit une loi binomiale.}
 \end{aligned}$$

De même, la v.a. XY possède une espérance car $XY(\Omega)$ est fini :

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^n jkP(X=j, Y=k) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n jkP(X=j, Y=k) \quad \text{car le terme } j=0 \text{ ne contribue pas à la somme} \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 P(X=k) \quad \text{car, pour tout } j \neq 0, (X=j) \cap (Y=k) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j \neq k \\ (X=k) & \text{si } j = k \end{cases} \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 P(X=k) \quad \text{car le terme } k=0 \text{ ne contribue pas à la somme} \\
 &= E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = np(1-p) + (np)^2 \quad \text{car } X \text{ suit une loi binomiale.}
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
 &= V(X) + [E(X)]^2 - E(X) \cdot \left[\frac{n+1}{2} \cdot (1-p)^n + E(X) \right] \\
 &= np(1-p) - np \frac{n+1}{2} \cdot (1-p)^n.
 \end{aligned}$$

Si $n = 1$, alors les v.a. sont indépendantes, ce qui implique qu'elles sont décorrélées [▷ Théorème XV.11](#). Donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$ pour tout $p \in]0, 1[$. L'expression de la covariance trouvée à la question précédente le confirme.

Si $n > 1$, alors les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes mais ça n'implique pas qu'elles sont décorrélées :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \iff 1-p = \exp \frac{\ln(2) - \ln(n+1)}{n-1} \text{ qui est bien dans }]0, 1[.$$