Partie I du problème du DS n°8 Merci à Thomas Mellonët

1.a. Soit $x > 0$,

la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de fonctions continues

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| dt$ est impropre en $+\infty$ uniquement

or $|f(t)e^{-xt}| \underset{t \to +\infty}{=} o(|f(t)|)$ car $x > 0$ donc $e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$0 \leq e^{-xt} \leq 1$

et $|f|$ est une fonction positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par hypothèse

≤ou $\leq |f(t)|$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| dt$ converge

i.e. la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ $\forall x > 0$

d'où $\boxed{f \in E}$

~~b. L'intégrale $\mathcal{L}(f)(0)$ est impropre en $+\infty$~~

~~b. L'intégrale~~ soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

b. Soit pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t)e^{-u_n t} \end{array}$

∘ $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux

∘ soit $t \in \mathbb{R}^+$, alors $e^{-u_n t} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-0 \times t} = 1$ par continuité de exp

d'où $f_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(t)$

i.e. la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers f qui est continue par morceaux

∘ soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $u_n t \geq 0$

donc par décroissance de $u \mapsto e^{-u}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $e^{-u_n t} \leq e^{-0} = 1$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(t)| \leq |f(t)|$ car $|f(t)| \geq 0$

de plus, $|f|$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par hypothèse

Donc d'après le théorème de la convergence dominée,

$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

et $\mathcal{L}(f)(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t) dt$, et ce pour chaque suite (u_n) qui tend vers 0

donc d'après la caractérisation séquentielle de la limite,

$\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}^+} f \in \mathbb{R}$

i.e $\boxed{\text{on peut prolonger par continuité la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ en } 0 \text{ en posant } \mathcal{L}(f)(0) = \int_{\mathbb{R}^+} f}$

2. a. Par hypothèse, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$

elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}^+$

soit alors $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leq M$

soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto |f(t)e^{-xt}|$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

~~donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| dt$ est impropre uniquement en $+\infty$~~

~~or $\forall t \geq 0, 0 \leq |f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$ car $e^{-xt} \geq 0$~~

~~or $t^2 e^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées puisque $x > 0$~~

~~d'où $e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$~~

~~et $\forall t >$~~

~~donc elle converge~~

donc l'intégrale impropre en $+\infty$ $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| dt$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| dt$ converge

or $\forall t \geq 1, 0 \leq |t^2 f(t)e^{-xt}| \leq M t^2 e^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

donc d'après le théorème des gendarmes,

$t^2 |f(t)e^{-xt}| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

i.e. $|f(t)e^{-xt}| \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Plus simplement :

$\forall t \in \mathbb{R}_+, |f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$

or $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ cv car $x > 0$

D'où l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| dt$ cv, donc $f \in E$.

et $\forall t \geq 1, \frac{1}{t^2} \geq 0$

et d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge

On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

et que donc $\boxed{f \in E}$

b. soit $x > 0$,

d'après l'inégalité triangulaire,

$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = -\frac{M}{x} [e^{-xt}]_0^{+\infty}$

or $x > 0$ donc $-xt \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$ d'où $e^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

et donc $0 \leq |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \frac{\pi}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

3. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de fonctions continues

~~soit $x > 0$, alors la fonction $t \mapsto |g_n(t)e^{-xt}|$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^+$~~

~~donc~~ l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g_n(t)e^{-xt}| dt$ ~~converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |g_n(t)e^{-xt}| dt$ converge~~ est impropre en $+\infty$

or $\forall t \geq 1$, $|g_n(t)e^{-xt}| = t^n e^{-\frac{xt}{2}} |f(t)e^{-\frac{xt}{2}}| \underset{t \to +\infty}{=} o(|f(t)e^{-\frac{xt}{2}}|)$

car $t^n e^{-xt/2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

de plus, $\forall t \geq 1$, $|f(t)e^{-xt/2}| \geq 0$

et $f \in E$, $\frac{x}{2} > 0$ donc la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\frac{x}{2}t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g_n(t)e^{-xt}| dt$ converge

d'où $\boxed{g_n \in E}$

4. Soit $f \in E$, soit $a > 0$

soient $X = [a, +\infty[$, $T = \mathbb{R}^+$ et $h : X \times T \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(t)e^{-xt}$

- $\forall x \in X$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est ~~intégrable sur T car $f \in E$~~ continue par morceaux et intégrable sur T car $f \in E$
- $\forall t \in T$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X car dérivable et de dérivée continue :

$\forall x \in X$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -t f(t)e^{-xt}$

- $\forall x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur T
- soit $(x,t) \in X \times T$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = t|f(t)|e^{-xt} \leq t|f(t)|e^{-at} = \varphi(t)$

par croissance de exp

La fonction ainsi définie est continue par morceaux sur T

de plus, d'après la question précédente, la fonction $t \mapsto t f(t)$ est un élément de E

donc $\forall y > 0$, la fonction $t \mapsto t f(t) e^{-yt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
en particulier, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $a > 0$
Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,
la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$
donc $\boxed{\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$
~~dep~~ et, $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt}\,dt$

~~les deux fonctions f et $x \cdot t \mapsto$~~

i.e. $\boxed{\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)}$

5 Soit $f \in E$
Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$

- d'après la question précédente, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]0, +\infty[$ et $f = g_0$ d'où $\mathcal{L}(f)^{(0)} = \mathcal{L}(f) = (-1)^0 \mathcal{L}(g_0)$
d'où $P(0)$
- soit $n \in \mathbb{N}$ qui vérifie $P(n)$
Soient $a > 0$, $X = [a, +\infty[$, $T = [0, +\infty[$ et $h_n : X \times T \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto t^n f(t) e^{-xt}$
- $\forall x \in X$, $t \mapsto h_n(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur T car $g_n \in E$ d'après 3
- $\forall t \in T$, $x \mapsto h_n(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X car dérivable et de dérivée continue : $\forall x \in X$, $\frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t) = -t^{n+1} f(t) e^{-xt}$
- $\forall x \in X$, $t \mapsto \frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)$ est une fonction continue par morceaux sur T
~~- soit $(x,t) \in X \times T$,~~

- soit φ : $T \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{n+1} f(t) e^{-at}$ ~~une application conti~~

φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur T d'après 3 car $g_n \in E$ et $a > 0$
de plus, φ est telle que $\forall (x,t) \in X \times T$, $\left|\frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$
Donc d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale,
$\mathcal{L}(g_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ $\forall a > 0$

donc $\mathcal{L}(g_n)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

et $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(g_n)'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} t^{n+1} f(t) e^{-xt}\,dt$

i.e. $\mathcal{L}(g_n)' = -\mathcal{L}(g_{n+1})$

d'où $(-1)^n \mathcal{L}(g_n)' = (-1)^{n+1} \mathcal{L}(g_{n+1})$

or par hypothèse ~~$\mathcal{L}(f)$~~ de récurrence, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,+\infty[$

et $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$

donc d'après ce qui précède, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]0, +\infty[$

et $\mathcal{L}(f)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \mathcal{L}(g_{n+1})$

d'où $P(n+1)$

On a montré par récurrence que

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E, \text{ la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)}$

6. Montrons que E est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel ~~de l'espace~~ vect du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$

par définition, E est inclus dans cet espace vectoriel

∘ La fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ est continue et telle que la fonction $t \mapsto 0e^{-xt} = 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ $\forall x > 0$

donc $E \neq \emptyset$

∘ Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

La fonction $\lambda f + \mu g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue

soit $x > 0$, alors d'après l'inégalité triangulaire,

$\forall t \geq 0$, $|(\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt}| \leq |\lambda|\,|f(t)e^{-xt}| + |\mu|\,|g(t)e^{-xt}|$

donc puisque les deux intégrales $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}|\,dt$ et $\int_0^{+\infty} |g(t)e^{-xt}|\,dt$

converge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |(\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt}|\,dt$ aussi

donc $\lambda f + \mu g \in E$

Donc $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel}}$ en tant que sous-espace vectoriel de l'espace mentionné plus tôt et $\boxed{\mathcal{L} \in \mathcal{L}(E, \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[, \mathbb{R}))}$ car (*)

oui

7. a. par hypothèse, $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

α

soit alors $a \in [0, +\infty[$ tel que $\forall t \geq a$, $|f(t) - \ell| \leq 2$, d'où f est bornée sur $[a,+\infty[$ car

(d'après l'inégalité triangulaire) : $\forall t \geq a$, $|f(t)| = |f(t) - \ell + \ell| \leq |f(t) - \ell| + |\ell| \leq 2 + |\ell|$ qui est un majorant. (on ♡)

~~ainsi~~ De plus, la fonction f étant continue sur le segment $[0, a]$, elle y est bornée.

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$

car $\forall t \geqslant a,\ \ell - 2 \leqslant f(t) \leqslant \ell + 2$ ♡

b. $f \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$

d'où l'existence de la suite de réels $(\mathcal{L}(f)(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$

soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t) e^{-a_n t}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-a_n t} a_n\, dt$$

On effectue le changement de variable $x = a_n t$ qui est de classe C^1 et strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$ car $a_n > 0$

alors $dx = a_n\, dt$

d'où $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a_n}\right) e^{-x}\, dx$

i.e $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx}$

c. • $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$

• soit $x \in [0, +\infty[$,

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$ donc $f\left(\frac{x}{a_n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \ell & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$ α

d'où $h_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell e^{-x}$

donc la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \begin{cases} \ell e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ α

• d'après a, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$

soit donc $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x)| \leqslant M$

soit $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{x}{a_n} \geqslant 0$ donc $\left|f\left(\frac{x}{a_n}\right)\right| \leqslant M$

d'où $|h_n(x)| \leqslant M e^{-x} = \varphi(x)$

La fonction φ ainsi définie sur $\mathbb{R}^+$ est continue par morceaux et intégrable

Donc d'après le théorème de la convergence dominée, les fonctions $x \mapsto l e^{-x}$ et $h_n, \forall n \in \mathbb{N}$, sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$

et $\int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} l e^{-x}\,dx = l$

on en déduit d'après la question précédente qu'à chaque fois qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ converge vers 0,

$$a_n \mathcal{L}(f)(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

et donc on conclut par la caractérisation séquentielle de la limite, que

$$\boxed{x \mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} l}$$

(*) soit $f \in E$,

d'après 5, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

de plus, par distributivité du produit sur $\mathbb{R}$ et linéarité de l'intégrale, $\mathcal{L}$ est une application linéaire