Merci à Arthur Durand

Partie II du problème du DS n° 8

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$$t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$$

1) f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| = \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

D'où f est bornée sur $\mathbb{R}^+$

Donc d'après partie I (2.a)

$f \in E$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)\, e^{-u_n t}$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, $f_n(t) = \dfrac{e^{-u_n t}}{1+t^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+t^2} = f(t)$

D'où f_n CVS vers f

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(t)| = \dfrac{e^{-u_n t}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable car c'est la dérivée de $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$

D'où, d'après le théorème de la CV dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u_n t}}{1+t^2}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

Ceci étant vrai pour toutes suites qui tend vers 0 d'après le théorème de la caractérisation séquentielle de la limite, $\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2}$ Oui MAIS ♥

Une fois la q. I 1.b) : Autrement dit : $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable, d'où $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$
D'où d'après partie I (2.b)

$$\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

2) d'après partie I (5), $\forall f \in E$, $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$

D'où $\forall x > 0$, $(\mathcal{L}(f))''(x) = \mathcal{L}(g_2)(x)$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$$

D'où, $\forall x > 0$:

$$(\mathcal{L}(f))''(x) + \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x}$$

Donc $\mathcal{L}(f)$ est bien une solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

→ Voir aussi en dernière page

Inutile : $x > 0$ dans la question, d'où l'intégrale $\int \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas impropre

3) a) * Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ cv

Cette intégrale cv ssi $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ cv

et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ cv

Or $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est faussement impropre

car $\sin(t) \underset{t \to 0}{\sim} t$ donc $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$

Soit $x>0$: $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ cv car

Soit $y \in [1,+\infty[$, $\int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$

par intégration par parties.

Or $\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_x^y$ a une limite finie quand $y \to +\infty$ car $\frac{\cos(y)}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ car $\begin{cases} \cos \text{ est borné} \\ \frac{1}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

et $0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ cv d'après le critère de Riemann

donc $\int_x^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ cv donc $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ cv

Donc $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ cv

~~Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ cv~~

Donc α est défini pour tout $x>0$.

Soit $x>0$

* Montrons que $\int_x^{+\infty} -\frac{\cos t}{t}\,dt$ cv

Inutile (~~Cette intégrale cv ssi $\int_x^1 -\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ cv et $\int_1^{+\infty} -\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ cv~~

Soit $y \in [1,+\infty[$, $\int_x^y -\frac{\cos(t)}{t}\,dt = \left[-\frac{\sin(t)}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\sin t}{t^2}\,dt$

Or $\left[-\frac{\sin(t)}{t}\right]_x^y$ a une limite finie quand $y \to +\infty$ car $\begin{cases} \sin \text{ est borné} \\ \frac{1}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

et $0 \leq \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ cv d'après le critère de Riemann

Donc $\int_x^{+\infty} -\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ cv

~~De plus $\int_x^1 -\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ n'est pas impropre~~

Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} -\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ cv.

Donc β est définie pour tout $x>0$.

b) les fonctions $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ et $t \mapsto -\frac{\cos t}{t}$ sont continues sur $]0,+\infty[$, donc α et β sont dérivables sur $]0,+\infty[$

et $\forall x>0$, $\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$ $\quad \beta'(x) = \frac{\cos x}{x}$

car $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \cdots = \int_x^{42} \cdots + \int_{42}^{+\infty} = -\int_{42}^{x} \cdots + \text{cte}$ et de même pour $\beta(x)$.

$\forall x>0$, $\alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x)$

$$= -\frac{\sin(x)}{x}\cos(x) + \frac{\cos x}{x}\sin(x)$$

$$= 0$$

et

$\forall x>0$, $\beta'(x)\cos(x) - \alpha'(x)\sin(x)$

$$= \frac{\cos^2(x)}{x} + \frac{\sin^2(x)}{x}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{x} + \frac{1-\cos^2(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x}$$

c) Soit $g : x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$,

g est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ car $\alpha, \beta, \cos$ et $\sin$ sont deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = -\alpha(x)\sin(x) + \alpha'(x)\cos(x) + \beta(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x)$

$$= \beta(x)\cos(x) - \alpha(x)\sin(x)$$

Or $\forall x > 0$, $g''(x) = -\beta(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x)$
$\qquad - \alpha(x)\cos(x) - \alpha'(x)\sin(x)$

$$= \frac{1}{x} - \left(\beta(x)\sin(x) + \alpha(x)\cos(x)\right)$$

$$= \frac{1}{x} - g(x)$$

D'où $\forall x > 0$, $g''(x) + g(x) = \frac{1}{x} - g(x) + g(x) = \frac{1}{x}$

Donc g est solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

d) $\forall x > 0$, $g(x) = \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$

$$= \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$= \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(t) - \sin(x)\cos(t)}{t}\,dt$$

$$= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x+u}\,du$$ en réalisant le changement de variable $u = t - x$ qui est bien C^1 et strictement monotone.

∠ Hyp CDV dans une intégrale impropre

Donc $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ est une solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

4) Résolvons $y'' + y = \frac{1}{x}$

(EH) : $z^2 + 1 = 0$

les racines de (EH) sont i et $-i$

à Rédiger Donc $\forall$ une fonction y est ~~une~~ solution sur $]0,+\infty[$ de $y'' + y = 0$ ssi il existe $((a,b) \in \mathbb{R}^2)$ tel que $\forall x>0$, $y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

D'après 3.d) $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ est une solution particulière de $y'' + y = \frac{1}{x}$

à Rédiger Donc $\forall$ une fonction y est ~~une~~ solution sur $]0,+\infty[$ de $y'' + y = \frac{1}{x}$ ssi il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x>0$, $y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$

Or $\mathcal{L}(f)$ est une solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$

Donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x > 0$,

$$\mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

5) Soit $y \in [0\,;+\infty[$,

$$\forall x>0, \left|\int_0^y \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt\right| = \left|\left[\frac{-\cos(t)}{x+t}\right]_0^y - \int_0^y \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\,dt\right|$$

$$\leq \left|\frac{-\cos(y)}{x+y} + \frac{1}{x}\right| + \left|\int_0^y \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\,dt\right|$$

d'après l'inégalité triangulaire

$$\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x+y} + \int_0^y \left|\frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\right|dt$$

d'après l'inégalité triangulaire

$$\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x+y} + \int_0^y \frac{1}{(x+t)^2}\,dt$$

par croissance de l'intégrale

$$\forall x > 0, \int_0^4 \frac{1}{(x+t)^2}\,dt = \left[\frac{-1}{x+t}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}$$

D'où

$$\forall x > 0, \quad \left|\int_0^4 \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt\right| \leq \frac{2}{x}$$

Les inégalités larges passent à la limite

Donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt\right| \leq \frac{2}{x}$$

6) D'après 5)

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt\right| \leq \frac{2}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

D'après 1), $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

D'où $a = b = 0$ (par l'absurde : si $(a,b) \neq (0,0)$, alors $a\cos(x) + b\sin(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$).

Donc $\forall x > 0, \quad \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$

7) $\forall x > 0, \forall t \in [1, +\infty[$

$$0 \leq \left|\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right| = \left|\frac{t\sin(t) - x\sin(t) - t\sin(t)}{t(x+t)}\right|$$

$$= \left|\frac{-x\sin(t)}{t(x+t)}\right| \leq \frac{x}{t(x+t)} \leq \frac{x}{t^2}$$

Par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \left| \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^2} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

D'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\, dt \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

8) $\forall x \geq 0, \ \forall t \in]0,1]$

$$\left| \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right| = \underbrace{|\sin t|}_{\vee} \frac{x}{t(x+t)} \leq \frac{x}{x+t} \quad \text{car } \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1$$

$\boxed{\text{Par croissance de l'intégrale :}}$

$$0 \leq \left| \int_0^1 \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\, dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{x}{x+t}\, dt$$

$$= x(\ln(x+1) - \ln(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

car $x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par croissances comparées

D'où d'après le théorème des gendarmes,

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\, dt \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

D'une part, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

9) $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$

D'autre part, $\mathcal{L}(f)(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \longrightarrow 0$ d'ap. les q. 6, 7 et 8

Enfin $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \pi/2$ d'ap. la q. 1.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$, par unicité de la limite,

Remarque sur la q. 3 : Les questions détaillées (a), (b) et (c) reviennent à résoudre l'équation différentielle (*) en faisant varier deux constantes.

Voir à ce sujet :
- l'exo 31 de la banque d'oraux CCINP qui résout, par la même méthode, la même équa. diff avec un 2nd membre ≠
- dans le dernier "Oraux" du CdP un corrigé de cet exo 31.