

D.S. N° 8 DE MATHÉMATIQUES

Durée : environ deux heures.

Cet énoncé contient un problème en deux parties.

Le corrigé sera en ligne sur le Cahier de Prépa.

On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout f dans E , on appelle TRANSFORMÉE DE LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

19

— Partie I : propriétés de la transformation de Laplace —

(tiré de CCP MATHS 1 MP 2011)

- 1) Dans cette question, f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- 0,5 a) Montrer que f appartient à E . *théor. continuité sous $\int$ < domination 1*
- 2 b) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. *ou*
- 2) Dans cette question, f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. *théor. cv dominée < cvs 0,5 domination 1*
- 0,5 a) Montrer que f appartient à E . *et carac. nég. 0,5*
- 1 b) Montrer que $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- 2 3) Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère la fonction $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction g_n est un élément de E .
- 2 4) Démontrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que : *$X = [a, +\infty[$ emment $a > 0$ et $T = [0, +\infty[$ 0,5 $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ intégrable sur T 0,5*
- $$[\mathcal{L}(f)]' = -\mathcal{L}(g_1).$$
- $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est $\mathcal{C}^1$ sur X 0,5 $|t| f(t) e^{-at} \leq |g_1(t) e^{-at}|$ et $g_1 \in E$ d'p. q. 3 0,5*
- 1 5) Démontrer par récurrence que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ et que :
- $$[\mathcal{L}(f)]^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n).$$
- 1 6) Justifier que E est un espace vectoriel et que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E vers $\mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$. *E est de $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{L}_1$ 0,5 0,25 0,25*
- 7) THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE — On suppose dans cette question que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, où ℓ est un réel.
- 2 a) Démontrer que f est bornée. *$\exists a > 0, f$ bornée sur $[a, +\infty[$ sur $[0, a]$*
- 0,5 b) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0 et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par : $h_n(x) = e^{-x} f(\frac{x}{a_n})$. Démontrer que : $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$.
- 2,5 c) Montrer que : $x \mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell$. *cvs de h_n 1 domination d'p. q. 7 a/1 carac. nég. 0,5*

Seules les deux premières questions utilisent la première partie du problème.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

- 1) Montrer que f appartient à E . Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$.

- 2) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x} \quad (*)$$

- 3) a) Justifier que $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont définis pour tout $x > 0$.

- b) Vérifier que les fonctions α et β sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$\alpha'(x) \cos(x) + \beta'(x) \sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad \beta'(x) \cos(x) - \alpha'(x) \sin(x) = \frac{1}{x}.$$

- c) Montrer que la fonction $x \mapsto \alpha(x) \cos(x) + \beta(x) \sin(x)$ est une solution de (*) sur $]0, +\infty[$.

- d) En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ est une solution de (*) sur $]0, +\infty[$.

- 4) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

- 5) En effectuant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right| \leq \frac{2}{x}.$$

- 6) En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

- 7) Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ .

- 8) Montrer que $\int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ .

- 9) Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$