

## THÈME 1 : SUITES &amp; SÉRIES

## Corrigé de l'exercice 4

19 mars 2026

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est égal à 1.

Soit, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]-1, +1[$ ,  $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ .

On étudie la série de fonctions  $\sum f_n$  qui n'est pas une série entière.

- 1) Démontrer que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la série numérique  $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  converge absolument.

On note, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ .

- 2) Soit un réel  $b \in ]0, 1[$ . Démontrer que la série de fonctions  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[-b, b]$ .

En déduire que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$  et exprimer, pour tout  $x \in ]-1, +1[$ ,  $f'(x)$  comme la somme d'une série.

- 3) En utilisant une série entière, déterminer la valeur  $\ell$  de la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .
- 4) Dans cette question,  $a_n = (-1)^n$  pour tout  $n \geq 1$ .
- a) Calculer  $f(0)$  et  $f'(0)$  et en déduire un équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
- b) Soit, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, +1[$ ,  $h_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum h_n$  converge uniformément sur  $[0, 1[$ .
- c) En déduire, en fonction de  $\ell$ , un équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend  $1^-$ .

- 1) Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , d'où  $1-x^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$  et  $\frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |a_n x^n|$ . Or le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est 1 par hypothèse, donc la série  $\sum |a_n x^n|$  converge et, par comparaison, la série  $\sum \left| \frac{a_n x^n}{1-x^n} \right|$  converge aussi.
- 2) Soit  $b \in ]0, 1[$ . Chaque fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[-b, +b]$  et :  $\forall x \in [-b, +b]$ ,  $f'_n(x) = a_n \frac{n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$ .

La série de fonctions  $\sum f'_n$  converge uniformément (car normalement) sur  $[-b, b]$ . En effet  $\forall x \in [-b, b]$ ,  $|f'_n(x)| \leq \frac{n a_n |b|^{n-1}}{(1-b^n)^2}$  car  $x^n \leq b^n < 1$ , d'où  $-1 < -b^n \leq -x^n$ , d'où  $0 < 1-b^n \leq 1-x^n$ , d'où  $0 \leq \frac{1}{1-x^n} \leq \frac{1}{1-b^n}$  car la fonction inverse est décroissante sur  $]0, +\infty[$ , donc  $\frac{1}{(1-x^n)^2} \leq \frac{1}{(1-b^n)^2}$  car la fonction carré est croissante sur  $]0, +\infty[$ . Or la série  $\sum \frac{n a_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$  converge absolument car un équivalent de  $\left| \frac{n a_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \right|$  est  $|n a_n b^{n-1}|$  qui ne change pas de signe et le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est égal à celui de  $\sum n a_n x^n$  car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence.

D'une part, la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[-b, +b]$  d'après la question 1.

D'autre part, la série de fonctions  $\sum f'_n$  converge uniformément comme il vient d'être prouvé.

Donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[-b, +b]$  et  $\forall x \in [-b, +b]$ ,  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$ . Ceci est vrai sur tout  $[-b, b] \subset ]-1, 1[$ , donc encore vrai sur  $] -1, +1[$ .

- 3) Le rayon de convergence de la série entière  $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  est 1 et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

Or la série numérique  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge d'après le théorème des séries alternées car la suite des réels  $\frac{1}{n}$  tend vers 0 en décroissant. D'où, d'après le théorème radial d'Abel,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = -\ln(2).$$

- 4) a)  $f(0) = 0$  et, de la question 2, on déduit que  $f$  est dérivable et que  $f'(0) = a_1 = -1$ . D'où  $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$ .  
Donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ .

b) Soit  $x \in [0, 1[$ . La suite de réels  $h_n(x)$  :

- tend vers 0 car  $0 \leq h_n(x) \leq \frac{x^n}{n x^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$  ;
- en décroissant car les deux suites  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $\left(\frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont décroissantes et positives.

D'après le théorème des séries alternées,  $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k(x) \right| \leq |h_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$  car  $1+x+x^2+\dots+x^{n-1} \geq x^n+x^n+x^n+\dots+x^n = (n+1)x^n$ .

Or  $\frac{1}{n+1}$  est un majorant et le *sup* est le plus petit majorant. D'où  $\sup_{x \in [0, 1[} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . D'où la suite des restes converge vers 0 uniformément sur  $[0, 1[$ , donc la série de fonctions  $\sum h_n$  converge uniformément sur  $[0, 1[$ .

c) Pour tout  $x \in ]-1, +1[$ ,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x).$$

Or  $h_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^n}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et la série de fonctions  $\sum h_n$  converge uniformément sur  $[0, 1[$ , d'où (théorème de la double limite) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'où  $(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\ln(2)$ . Donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}$ .