* Réviser la remarque 1 du chapitre III.

Autre idée: La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, d'où $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive* de f. D'où $F'(0) = f(0)$. Or $F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to 0} u(f)(x)$.
Donc $u(f)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$.

Merci à Adrien Déprés.

Thème 2

Exercice 7

Posons $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Soit $f \in E$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$: D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $u(f)$ est donc continue, donc dérivable, sur $\mathbb{R}_+^*$

~~Puisque la fonction~~

La fonction f est en particulier continue en 0 :

$$f(x) = f(0) + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

En intégrant le développement limité :

$$\int_0^x f(t)dt = f(0)x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

D'où

$$u(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(0) + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

D'où

$$u(f)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0) = u(f)(0)$$

La fonction $u(f)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$:

Oui. Voir aussi une 2nde méthode en page 4 ♡

<u>L'espace vectoriel E est donc stable par u</u>

Soient $(f_1, f_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

On remarque

$$u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0)$$
$$= \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0)$$
$$= \lambda_1 u(f_1)(0) + \lambda_2 u(f_2)(0)$$

et

$$\forall x > 0,\ u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{x}\left(\int_0^x \lambda_1 f_1(t) + \int_0^x \lambda_2 f_2(t)\right), \text{ par linéarité de l'intégrale}$$
$$= \lambda_1 u(f_1)(x) + \lambda_2 u(f_2)(x)$$

$\boxed{\text{L'application } u \text{ est donc un endomorphisme de } E}$

Soit $f \in E$

$$f \in \ker(u) \Leftrightarrow u(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(f)(0) = 0 \\ \forall x > 0,\ \cancel{u(f)}\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x > 0,\ \int_0^x f(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x > 0,\ f(x) = 0 \end{cases} \text{, en dérivant}$$

la fonction $(x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt)$ qui est constante.

Donc

$$f \in \ker(u) \Leftrightarrow f = 0 \text{, donc } \ker(u) = \{0\}$$

$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est donc injectif}}$

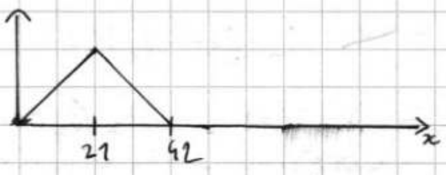
Par suite, $0 \notin Sp(u)$.

Soit $g \in \mathrm{Im}(u)$, soit $f \in E$ telle que $g = u(f)$

Alors $\forall x > 0,\ g(x) \times x = \int_0^x f(t)\,dt$

Or toute fonction de E n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

la fonction définie par $\left(x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 21] \\ 42 - x & \text{si } x \in [21, 42] \\ 0 & \text{si } x \geq 42 \end{cases}\right)$:



n'est par exemple pas dérivable en 21 et 42 alors qu'elle appartient bien à E

$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ n'est donc pas surjectif}}$

Ou : la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est un autre contre-exemple

* Inutile d'écrire cette condition car elle est réalisée par définition de l'application u.

Soit $f \in E$

$$f \in E_1(u) \iff u(f) = f$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(f)(x) = f(x)$$

$$\iff \begin{cases} \forall x > 0, & \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = f(x) \\ \cancel{u(f)(0) = f(0)} \ * \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x > 0, \int_0^x f(t)\,dt = x f(x) \\ \cancel{u(f)(0) = f(0)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x > 0, & f(x) = f(x) + x f'(x) \\ \cancel{u(f)(0) = f(0)} \end{cases}$$

, ~~par~~ en dérivant la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque l'expression précédente nous indique que f y est dérivable

D'où

$$f \in E_1(u) \iff \begin{cases} \forall x > 0, f'(x) = 0 \\ \cancel{u(f)(0) = f(0)} \end{cases} \iff f \text{ est constante sur }]0,+\infty[$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = f(0) \text{ car } f \text{ est continue en } 0 \text{ car } f \in E.$$

$$\iff f \text{ est une fonction constante}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des vecteurs de E invariants par u est donc l'ensemble des fonctions constantes}}$

Par suite, $1 \in Sp(u)$.

De même, pour $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$f \in E_\lambda(u) \iff u(f) = \lambda f$$

$$\iff \begin{cases} \forall x > 0, & \int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x) \\ u(f)(0) = \lambda f(0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x > 0, f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x) & L_1 \\ f(0) = \lambda f(0) & L_2 \end{cases}$$

$L_2 \iff f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ par hypothèse.

$L_1 \Leftrightarrow \forall x>0,\ f'(x) + a(x) f(x) = 0$

où $a(x) = \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{x}$. D'où

$L_1 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x>0,\ f(x) = K e^{-A(x)}$

où $A(x) = \frac{\lambda-1}{\lambda}\ln(x)$. D'où

$L_1 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x>0,\ f(x) = K.\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

$= K x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

De plus, une telle fonction f appartient à E

ssi $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$ d'ap. $L2$

ssi $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$

ssi $\lambda \in]0,1[$

Donc $\boxed{Sp(f) =]0,1]}$

La fonction $m(f) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x>0 \\ f(0) & \text{si } x=0 \end{cases}$ est continue sur $]0,+\infty[$ par les théo. usuels. Elle est aussi continue en 0 ssi

$m(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0) = m(f)(0)$

Or $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - f(0) = \frac{1}{x}\int_0^x [f(t)-f(0)]\,dt$. D'où

$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - f(0)\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-f(0)|\,dt$ d'ap. l'inégalité triangulaire.

Soit $\varepsilon>0$: $\exists \delta>0$, $|t-0|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(0)|<\varepsilon$ car f est continue en 0 car $f \in E$.

D'où : $|x-0|<\delta \Rightarrow \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-f(0)|\,dt < \varepsilon \Rightarrow |m(f)(x) - m(f)(0)| < \varepsilon$.

Donc la fonction $m(f)$ est continue en 0.