Exo 9 rémi l'ouo

Merci à Alexander Wimmer

a) f est diagonalisable, donc $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)$.

Soit $u \in E$, $i \in [\![1;n]\!]$. $L_i(f)$ est bien défini car les endomorphismes $(f-\lambda_j id_E) \in K[f]$ commutent.

la composée, par le produit

$$L_i(f)(u) = p_i(u) = \left(\prod_{j \neq i} \frac{f-\lambda_j id_E}{\lambda_i - \lambda_j}\right) u = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \times \left(\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j id_E)\right)(u), \text{ et } \frac{1}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)} \neq 0.$$

Donc $\ker(p_i) = \ker\left(\prod_{j \neq i}(f-\lambda_j id_E)\right) \supset \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f)$, et

$$\forall u \in E_{\lambda_i}(f),\ p_i(u) = \frac{\prod_{j\neq i}(f-\lambda_j id_E)(u)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} = \left(\prod_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}\right) u = u, \text{ donc } \mathrm{Im}(p_i) \supset E_{\lambda_i}.$$

Or d'après le théorème du rang, $\dim \ker(p_i) + \dim \mathrm{Im}(p_i) = n$, or $\dim E_{\lambda_i}(f) + \dim\left(\bigoplus_{j\neq i} E_{\lambda_j}(f)\right) = n$

donc $\boxed{\begin{cases} \mathrm{Im}\, p_i = E_{\lambda_i}(f) \\ \ker p_i = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f) \end{cases}}$ et $\forall u \in \mathrm{Im}\, p_i$, $p_i(u) = u$ i.e. $\boxed{p_i \circ p_i = p_i}$.

α

Donc p_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(u)$.

oui

On considère une base B adaptée à f : $B = (e_1, \dots, e_n)$ consistant en ~~une base~~ la concaténation de bases de (E_{λ_j}) dans cet ordre, et on pose $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\mu_j = \dim E_{\lambda_j}$.

Alors $[f]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 \ \lambda_2 & \\ (0) & & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix}$ (μ_1), et $\forall k \in \mathbb{N}$, $[f^k]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1^k \ \lambda_2^k & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ (μ_1). Or

$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $[p_i]_B = \begin{bmatrix} (0) & & \\ & I_{\mu_i} & \\ & & (0) \end{bmatrix}$, et alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k [p_i]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k p_i\right]_B = [f^k]_B$, donc

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\quad f^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k p_i}$.

b) On pose $P = \prod_{i=1}^{s} (X - \mu_i) = \sum_{i=0}^{s} a_i X^i$. P est alors scindé à racines simples, et

$$P(f) = \sum_{i=0}^{s} a_i f^i = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_i \mu_j^i f_j = \sum_{j=1}^{s} P(\mu_j) f_j = \sum_{j=1}^{s} 0 f_j = 0.$$

Donc f est annulé par un polynôme scindé à racines simples, i.e. $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$. Oui

c) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les n vp distinctes de f, B une base propre de E tq $F = [f]_B = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. Soit $g \in C(f)$, $G = [g]_B$.

Soit $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = U$ un vp de F, ~~alors~~ $i \in [\![1;n]\!]$ tq $FU = \lambda_i U$. Alors $FG = GF$ donc

$GFU = \lambda_i GU = FGU$, donc GU est un vp de F, ~~[illegible]~~ associé à λ_i.

Donc pour tout vp u de f, ~~[illegible]~~ en notant $i \in [\![1;n]\!]$ tq $f(u) = \lambda_i u$, $f(g(u)) = \lambda_i g(u)$ ~~[illegible]~~ dim $E_{\lambda_i} = 1$ donc $g(u) \in \mathrm{Vect}(u) = E_{\lambda_i}$, i.e. $\boxed{u \text{ est un vp de } g}$.

Ainsi, B est une base de vp de g, donc g est diagonalisable et $G = \mathrm{Diag}(\mu_1 \dots \mu_n)$, où $(\mu_1 \dots \mu_n) \in \mathbb{K}^n$.

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(F) = \mathrm{Diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

$(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ sont ~~tous~~ deux à deux distinctes, donc d'après le théorème d'interpolation de Lagrange, $\exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $P(\lambda_i) = \mu_i$, et alors P est l'unique polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tq $G = P(F)$ i.e. $\boxed{g = P(f)}$.

Soit $k \in \mathbb{K}$, $(g_1, g_2) \in C(f)^2$. Alors $(g_1 + kg_2) \circ f = g_1 \circ f + k(g_2 \circ f) = f \circ g_1 + k(f \circ g_2) = f \circ (g_1 + kg_2)$. Donc $\boxed{C(f) \text{ est un sev de } L(E)}$.

On vient de montrer que $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & C(f) \\ P & \longmapsto & P(f) \end{array}$ est une bijection, et de plus elle est linéaire

Donc $\dim \mathbb{K}_{n-1}[X] = n = \cancel{C(f)}$ $\boxed{\dim C(f) = n}$. Oui