

1) L'intégrale est impropre en $+\infty$. $\forall x > 1, 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_m: t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^m}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale $K_m = \int_0^{+\infty} f_m$ est impropre en $+\infty$.

$f_m(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2m}}$ qui ne change pas de signe, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2m}}$ converge

d'après le critère de Riemann, car $2m \geq 2 > 1$
 Donc par comparaison l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_m(t) dt$ converge.

Donc l'intégrale K_m converge.

Soit $m \geq 2$. Pour tout $t \geq 1, 1+t^2 \geq 1 > 0$ donc $(1+t^2)^m > 0$
 donc $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^m}$, et comme $1 \leq 2t, 0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^m} \leq \frac{2t}{(1+t^2)^m}$

Par croissance de l'intégrale, si $a > 1, 0 \leq \int_1^a \frac{dt}{(1+t^2)^m} \leq \int_1^a \frac{2t dt}{(1+t^2)^m}$

$$\int_1^a \frac{2t dt}{(1+t^2)^m} = \left[\frac{-1}{(m-1)(1+t^2)^{m-1}} \right]_1^a = \frac{1}{(m-1)} \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{(1+a^2)^{m-1}} \right) \text{ car } m-1 > 0.$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{(m-1)2^{m-1}} \text{ car } (1+a^2)^{m-1} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$$

Les inégalités larges passent à la limite $a \rightarrow +\infty$, d'où $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} \leq \frac{1}{(m-1)2^{m-1}}$

d'où $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \underset{m \rightarrow \infty}{\circ} \left(\frac{1}{(m-1)2^{m-1}} \right) = \underset{m \rightarrow \infty}{\circ} \left(\frac{1}{m2^m} \right)$

3) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0, 1], 1+t^2 \leq 2$ donc $(1+t^2)^m \leq 2^m$
 donc $\frac{1}{(1+t^2)^m} \geq \frac{1}{2^m}$ (car $(1+t^2)^m > 0$).

Par croissance de l'intégrale, $J_m = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^m} \geq \int_0^1 \frac{dt}{2^m} = \frac{1}{2^m}$

$$K_m = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^m} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} = J_m + \underset{m \rightarrow \infty}{\circ} \left(\frac{1}{m2^m} \right) \text{ d'après 1.}$$

Or $0 \leq \frac{1}{2^m} \leq J_m$ donc $\frac{1}{2^m} = \underset{m \rightarrow \infty}{\circ} \left(J_m \right)$

d'où $K_m = J_m \left(1 + \underset{m \rightarrow \infty}{\circ} \left(\frac{1}{m} \right) \right) = J_m \left(1 + \underset{m \rightarrow \infty}{\circ} (1) \right) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} J_m$

4) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $u: t \mapsto t$ et $v: t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^m}$ sont de classe C^1

sur \mathbb{R}^+ , $(uv)(t) = \frac{t}{(1+t^2)^m} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et $(uv)(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{t^{2m}} = \frac{1}{t^{2m-1}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ car $2m > 1$.

D'après le théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque,
 $\int_0^{+\infty} u'v = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} uv'$ (car l'intégrale $\int_0^{+\infty} uv = K_m$ converge d'après 1.)

$$\text{donc } K_m = \int_0^{+\infty} u'v = - \int_0^{+\infty} t(-m)2t \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}} = 2m \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{m+1}}$$

$$= 2m \int_0^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{m+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}} \right) dt = 2m \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t^2)^m} - \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}} \right) dt$$

car $\forall t \geq 0, 1+t^2 > 0$.

Or d'après 1 les intégrales $K_m = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m}$ et $K_{m+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}}$ convergent.

d'où $K_m = 2m \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}} \right) = 2m(K_m - K_{m+1})$

Donc $\frac{1}{2m} K_m = K_m - K_{m+1}$, d'où $K_m = K_{m+1} + \frac{1}{2m} K_m$

Thème 3 - Exo 10. Exercice à Roumain Leleidiac.

5) D'après 3, $K_{n+1} = K_n - \frac{1}{2n} K_n = K_n (1 + o_{n \rightarrow \infty}(1))$ donc $K_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K_{n+1}$.

Mieux: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$ d'après 3.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} K_1$:

le cas $n=1$ est immédiat, et si $K_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} K_1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque,

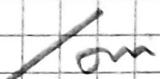
$$\text{alors } K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2} \cdot \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} K_1 = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} K_1$$

D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{(2n)!}{4^n n!^2} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4^n} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4^n} \frac{2\sqrt{\pi n}}{2\pi n} \left(\frac{2n}{e} \cdot \frac{e}{n}\right)^{2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4^n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

Soit $x > 0$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctant}]_0^x = \text{Arctan } x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ d'où $K_1 = \frac{\pi}{2}$.

Comme $K_1 \neq 0$, on a $K_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n)!}{4^n n!^2} K_1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\pi}{2}$

D'où $K_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ 

6) On pose le CDR $u = t\sqrt{n}$ qui est bien de classe C^1 . D'où $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} \frac{du}{\sqrt{n}}$.

Donc $\sqrt{n} J_n = \int_0^{+\infty} f_n(u) du$, où $f_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } u > \sqrt{n} \end{cases}$.

Chaque fonction f_n est c.p.c. et intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus f_n c.v.s vers $f: u \mapsto e^{-u^2}$.
En effet, soit $u \in [0, +\infty[$: APCR, $u \leq \sqrt{n}$, d'où $f_n(u) = \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-u^2}$.

De plus, $\forall n, \forall u, |f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$ car \heartsuit . Et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du$ converge.

D'ap. le théo. de cv dominée, $\int_0^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(u) du$.

Donc $\boxed{\sqrt{n} J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du}$

7) D'ap. les q. 2 et 6, $\sqrt{n} J_n \sim \sqrt{n} K_n \sim \sqrt{n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Or $\sqrt{n} J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

Par unicité de la limite, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

$\heartsuit \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{u^2}{n}\right)^k \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{u^2}{n} = 1+u^2$.