

THÈME 3 : INTÉGRALES

Corrigé de l'exercice 11

21 mars 2026

Soient, pour tout réel x ,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- 1) Calculer $F(0)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
- 2) Montrer que la fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

- 3) Montrer que la fonction G est dérivable sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (G^2)'(x) = -F'(x).$$

- 4) Calculer $G(0)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ existe et est finie.

- 5) En déduire la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- 1) $F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Pour tout réel x , $0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

- 2) Soient $a > 0$, $X = [-a, a]$, $T = [0, 1]$ et $\forall (x, t) \in X \times T$, $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Montrons que la fonction F est de classe C^1 sur X .

(i) Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est C^1 sur X car (*)

(ii) Pour chaque $x \in X$, $\begin{cases} t \mapsto f(x, t) \text{ est cpm et intégrable sur } T \text{ car (**)} \\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est cpm sur } T \end{cases}$

(iii) Pour tout $(x, t) \in X \times T$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ et $\int_T \varphi(t) dt$ converge (***)

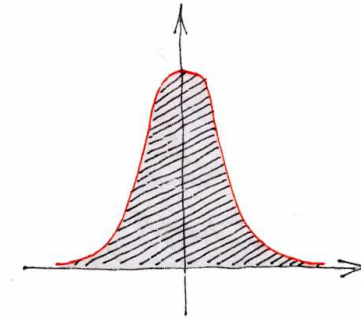


FIGURE 1 – LA GAUSSIENNE $t \mapsto e^{-t^2}$

D'où la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$ est C^1 sur $[-a, a]$. Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc F est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 [-2x \cdot e^{-x^2(1+t^2)}] t dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$.

(*) $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2x \cdot e^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur X .

(**) $|f(x, t)| \leq 1$ et l'intégrale $\int_T 1 dt$ converge (elle n'est même pas impropre).

(***) avec $\varphi(t) = 2a : \forall (x, t) \in X \times T$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a$ et $\int_0^1 2a dt$ converge.

- 3) G est une primitive de la fonction continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t^2}$, d'où G est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = e^{-x^2}$. Donc $(G^2)'(x) = 2G(x)G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Dans le cas particulier où $x = 0$, on constate que $(G^2)'(0) = -F'(0)$ car les deux membres sont nuls. Si $x \neq 0$, alors, dans l'intégrale $\int_0^x e^{-t^2} dt$, faisons le changement de variable $t = ux$, $dt = xdu$ en changeant les bornes : t va de 0 à $x \iff u$ va de 0 à 1. La fonction $u \mapsto ux$ est bien de classe C^1 , d'où :

$$(G^2)'(x) = -F'(x).$$

- 4) $G(0) = 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ impropre en $+\infty$ converge car : $\forall t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Donc la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ existe et est finie : elle est égale à $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

- 5) La fonction $F + G^2$ est constante (car sa dérivée est nulle d'après 3) et cette constante vaut $F(0) + G^2(0) = \frac{\pi}{4} + 0$ d'après 1. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ d'après 1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) =$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0 \text{ d'après 4). Donc } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = +\sqrt{\pi/4}$$