Merci à Dorian Guillet

Révisions (thème 2) Corrigé de l'Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 2. Soit a l'~~endomorp~~ représenté dans une base $\mathcal{B}_0$ d'un ev E de dim n par la matrice A ~~l'endomorphisme canoniquement associé à A~~, d'où $\dim(\mathrm{Im}\, a) = 2$. D'où $\dim(\mathrm{Ker}\, a) = n-2$ d'ap. le théo. du rang. Soit alors $\mathcal{B}_1$ une base du noyau. On complète $\mathcal{B}_1$ en ~~une~~ cette base $\mathcal{B}$ de l'ev E. ~~Donc en se plaçant dans une base adaptée~~ $\mathcal{B}$, la matrice de a est

$$[a]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 \end{array}\right]$$

car la matrice est triangulaire par blocs

* Donc
$$\chi_a(X) = \left|\begin{array}{c|cc} XI_{n-2} & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & X-a_1 & -b_1 \\ & -a_2 & X-b_2 \end{array}\right| = \det XI_{n-2} \times \det\begin{pmatrix} X-a_1 & -b_1 \\ -a_2 & X-b_2 \end{pmatrix}$$

$$= X^{n-2}\left((X-a_1)(X-b_2) - b_1a_2\right)$$

$$= X^{n-2}\left(X^2 - (a_1+b_2)X + a_1b_2 - b_1a_2\right)$$

Comme le polynôme caractéristique est invariant par changement de base : $\chi_A = \chi_a$

De même la trace est aussi un invariant de similitude, d'où

$\mathrm{tr}(A) = a_1 + b_2$.

et de plus,

$$\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 \end{array}\right)\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & a_1^2 + b_1a_2 & * \\ & * & b_2^2 + a_2b_1 \end{array}\right)$$

$$= a_1^2 + b_2^2 + \cancel{b_1a_2} + 2a_2b_1$$

$$= (a_1+b_2)^2 - 2a_1b_2 + 2a_2b_1$$

$$= (\mathrm{tr}\, A)^2 + 2(a_2b_1 - a_1b_2)$$

Donc

$$\boxed{\chi_A(X) = X^{n-2}\left(X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2)\right)}$$

* Se rappeler que : $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det(A) \times \det(C)$

mais que : $\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)$ n'est pas nécessairement égal $\det(A)\det(D) - \det(B).\det(C)$