

THÈME 2 : ALGÈBRE LINÉAIRE

Corrigé de l'exercice 8

22 mars 2026

- 1) On note K la fonction définie de $[0, 1]^2$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$K(s, t) = (1 - s)t \text{ si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \text{ et } K(s, t) = (1 - t)s \text{ sinon}$$

et T l'application définie sur $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in E, \forall s \in [0, 1], T(f)(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t) dt.$$

En écrivant $T(f)$ comme la somme de deux intégrales, montrer que T est un endomorphisme de E .

- 2) On munit E de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

Montrer que l'endomorphisme T est continu.

- 3) Soit $f \in E$. Montrer que $T(f)$ est de classe C^2 et que $T(f)'' = -f$.
 4) Montrer que l'endomorphisme T est injectif.
 5) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda Id - T)$. Montrer que, si $f \in E_\lambda$, alors

$$\lambda f'' + f = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0.$$

- 6) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer E_λ .

- 1) La linéarité de T résulte de la linéarité de l'intégrale. Soit $f \in E$. Reste à montrer que la fonction $T(f)$ est continue :

$$\forall s \in [0, 1], T(f)(s) = (1 - s) \int_0^s tf(t) dt + s \int_s^1 (1 - t)f(t) dt \quad (*)$$

Or la fonction f est continue, d'où les fonctions $s \mapsto \int_0^s tf(t) dt$ et $s \mapsto \int_s^1 (1 - t)f(t) dt$ sont dérivables [▷ III.1](#), donc continues et, par suite la fonction $T(f)$ l'est aussi. Donc T est un endomorphisme de E .

- 2) Pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, $|K(s, t)| \leq 1$, d'où

$$\forall s \in [0, 1], |T(f)(s)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_2$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs f et $t \mapsto 1$. Donc, en élevant au carré et en intégrant de 0 à 1 :

$$\|T(f)\|_2^2 \leq \|f_2\|^2, \text{ donc } \|T(f)\|_2 \leq \|f_2\|,$$

ce qui prouve que l'endomorphisme T de l'evn $(E, \|\cdot\|_2)$ est continu [▷ XI.37](#).

- 3) Soit $f \in E$. Comme vu à la question [2](#), la fonction $T(f)$ est dérivable et, en dérivant $(*)$:

$$\forall s \in [0, 1], (T(f))'(s) = - \int_0^s tf(t) dt + \int_s^1 (1 - t)f(t) dt$$

D'où la fonction $(T(f))'$ est encore dérivable et

$$\forall s \in [0, 1], (T(f))''(s) = -f(s),$$

ce qui prouve aussi que la fonction $T(f)$ est de classe C^2 .

- 4) Soit $f \in \text{Ker}(T)$. Alors $T(f) = 0$, d'où $f = -(T(f))'' = 0$ d'après la question précédente. Donc l'application T est injective.
 5) Soit $f \in E_\lambda$: si $\lambda = 0$, alors $f = 0$ par injectivité de T , donc $(**)$. Sinon $T(f) = \lambda f$, d'où $T(f)(0) = \lambda f(0)$. Or $T(f)(0) = 0$ d'après $(*)$. D'où $\lambda f(0) = 0$. De plus, $\lambda \neq 0$ car l'application linéaire T est injective d'après la question précédente, donc $f(0) = 0$. De même, $T(f)(1) = 0$ d'après $(*)$, donc $f(1) = 0$. Enfin, d'après la question [3](#),

$$-f = (T(f))'' = \lambda f''.$$

6) De la question 4, il résulte que $E_0 = \{0_E\}$. Soit $\lambda \neq 0$.

ANALYSE : si $f \in E_\lambda$, alors

$$\lambda f'' + f = 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0 \quad (**)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2 (car $\lambda \neq 0$) linéaire sans second membre avec deux conditions aux bords, qu'on résout.

- Premier cas : si $\lambda > 0$, alors on pose $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$. Il existe des constantes réelles a et b telles que $\forall s, f(s) = a \cos(\omega s) + b \sin(\omega s)$. De $f(0) = 0$, on tire que $a = 0$ et de $f(1) = 0$ que $b \sin(\omega) = 0$. Si $b = 0$, alors $f = 0$. Sinon $\omega \equiv 0[\pi]$ et il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \frac{1}{k^2 \pi^2}$ et $f \in \text{Vect}(s \mapsto \sin(k\pi s))$.
- Second cas : si $\lambda < 0$, alors on pose $\omega = 1/\sqrt{-\lambda}$. Il existe des constantes a et b telles que $\forall s, f(s) = a \text{ch}(\omega s) + b \text{sh}(\omega s)$. De $f(0) = 0$, on tire que $a = 0$ et de $f(1) = 0$ que $b = 0$. Donc $f = 0$.

SYNTHÈSE : on vérifie que la fonction nulle appartient à E_λ pour tout réel λ . Et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : s \mapsto \sin(k\pi s)$ est une solution de (**). Montrons qu'elle appartient alors à $E_{\frac{1}{k^2 \pi^2}}$: $f'' = -k^2 \pi^2 f$, d'où $f'' = (k^2 \pi^2 T(f))''$, donc la fonction $f - k^2 \pi^2 T(f)$ est affine et, de plus, elle est nulle en 0 et 1. C'est donc la fonction nulle, ce qui prouve que $T(f) = \frac{1}{k^2 \pi^2} f$.

Donc, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \frac{1}{k^2 \pi^2}$, alors $E_{\frac{1}{k^2 \pi^2}} = \text{Vect}(s \mapsto \sin(k\pi s))$. Sinon $E_\lambda = \{0_E\}$.