

K D O D U 2 7 / 0 3 / 2 0 2 6

Variables aléatoires

23 mars 2026

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

(tiré de CCINP PC 2020)

On étudie le déplacement aléatoire d'un pion sur l'axe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$.

Pour modéliser cette expérience aléatoire, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif est de déterminer la loi de la variable aléatoire T à valeurs dans $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, appelée *temps de retour à l'origine* et définie de la façon suivante : si $S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $T = \infty$. Et $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = 0\}$ sinon.

On définit finalement les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

- 1) Déterminer p_n pour tout entier n impair.
- 2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$.
- 3) Exprimer S_n en fonction de Z_n et en déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

- 4) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Justifier que la fonction f est bien définie et montrer que :

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- 5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

▷ Comme dans le Kdo du 22/11/2025 q2, « remettre le compteur à zéro ».

- 6) Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Justifier que la fonction g est bien définie et montrer que :

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

- 7) En déduire q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 8) Déterminer la valeur de $P(T = \infty)$.
- 9) La variable aléatoire T possède-t-elle une espérance ? ▷ **Théorème de la limite de la dérivée.**