

## CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 15

## Calcul différentiel

24 mars 2026

**Exercice 1** (Dériver suivant un vecteur). Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient un ouvert  $U \subset E$ , un point  $a \in U$  et un vecteur  $v \in E$ . On dit qu'une fonction  $f : U \rightarrow F$  est dérivable en le point  $a$  suivant le vecteur  $v$  si le vecteur

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe. On note alors ce vecteur  $D_v f(a)$  et on l'appelle la dérivée de  $f$  en  $a$  suivant  $v$ .

- Montrer que : si  $f$  est dérivable en  $a$  suivant tout vecteur  $v$ , alors  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$ .
- Soit  $g(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $g(0, 0) = 0$ .
  - Montrer que la fonction  $g$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .
  - Montrer que  $g$  est dérivable en  $(0, 0)$  suivant tout vecteur  $(x, y)$ .
- Montrer que : si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$  suivant tout vecteur  $v$  et

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v.$$

La réciproque est-elle vraie ?

- 
- La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  suivant chaque vecteur de base  $e_i$ . D'où  $\frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} D_{e_i} f(a)$ . Donc  $\partial_i f(a)$  existe et est égal à  $D_{e_i} f(a)$ .
  - La fonction  $g$  n'est pas continue en  $(0, 0)$  car  $(x, x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (0, 0)$  mais  $g(x, x^2) = \frac{1}{2}$  ne tend pas vers  $g(0, 0) = 0$ .
    - Soient  $a = (0, 0)$  et  $v = (x, y) \neq (0, 0)$ . Alors  $\frac{g(a + tv) - g(a)}{t} = \frac{g(tx, ty)}{t} = \frac{t^2 x^2 y}{t^4 x^4 + t^2 y^2}$ , d'où :
      - (premier cas) si  $y \neq 0$ , alors  $\frac{g(tx, ty)}{t} = \frac{x^2 y}{t^2 x^4 + y^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{x^2}{y}$  ;
      - (second cas) si  $y = 0$ , alors  $\frac{g(tx, ty)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ .

Donc  $g$  est dérivable en  $(0, 0)$  suivant tout vecteur et  $D_{(x, y)} g(0, 0)$  est égal à  $\frac{x^2}{y}$  si  $y \neq 0$  et est égal à 0 si  $y = 0$ .

- Soit  $v \in E$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f(a + tv) = f(a) + df(a) \cdot tv + \|tv\|\varepsilon(tv)$ .

D'où, pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$  :  $\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = df(a) \cdot v + \|v\|\varepsilon(tv) \xrightarrow{t \rightarrow 0} df(a) \cdot v$ . Donc  $f$  est dérivable en  $a$  suivant  $v$  et  $D_v f(a) = df(a) \cdot v$ .

La réciproque est fautive : la question précédente exhibe un contre-exemple. En effet, elle est dérivable en  $(0, 0)$  suivant tout vecteur mais elle n'est pas continue en  $(0, 0)$ , donc a fortiori pas différentiable en  $(0, 0)$ .

**Exercice 2.** Soient  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $a$  un élément de  $U$  et deux fonctions

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : E \rightarrow E.$$

différentiables en  $a$ . Montrer que la fonction

$$\lambda f : E \rightarrow E, x \mapsto \lambda(x)f(x)$$

est différentiable en  $a$  et que

$$d(\lambda f)(a) = f(a)d\lambda(a) + \lambda(a)df(a).$$

---


$$\begin{aligned}
(\lambda f)(a+h) &= \lambda(a+h)f(a+h) = [\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_1(h)] [f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] \\
&= \lambda(a)f(a) + \underbrace{(d\lambda(a) \cdot h)f(a) + \lambda(a)df(a) \cdot h}_{L(h)} + \underbrace{(d\lambda(a) \cdot h)df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_1(h)[f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] + [\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h]\|h\|\varepsilon_2(h)}_{R(h)}
\end{aligned}$$

Le reste  $R(h)$  est un  $o(\|h\|)$  car

$\frac{R(h)}{\|h\|} = (d\lambda(a) \cdot h) df(a) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \varepsilon_1(h) [f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] + [\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h] \varepsilon_2(h)$  tend vers 0 car :

- $d\lambda(a) \cdot h$  tend vers 0 (car l'application  $d\lambda(a)$  est linéaire sur l'ev  $E$  qui est de dimension finie, donc continue) et  $\left\| df(a) \cdot \frac{h}{\|h\|} \right\| \leq \|df_a\|$  (car l'application  $df(a)$  est linéaire sur l'ev  $E$  qui est de dimension finie, donc continue) ;
- $\varepsilon_1(h)$  tend vers 0 et  $[f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)]$  tend vers  $f(a)$  ;
- $\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h$  tend vers  $\lambda(a)$  et  $\varepsilon_2(h)$  tend vers 0.

Et l'application  $L : h \mapsto (d\lambda_a \cdot h)f(a) + \lambda(a)df(a) \cdot h$  est linéaire, donc  $\lambda f$  est différentiable en  $a$  et  $d(\lambda f)(a) = f(a)d\lambda(a) + \lambda(a)df(a)$ .

**Exercice 3** (Le gradient en coordonnées cylindriques). La fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

change les coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

1. Calculer la matrice jacobienne  $J_f(r, \varphi, z)$ .
2. Représenter sur un dessin les coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  d'un point  $M$  et les trois vecteurs colonnes de la jacobienne.
3. Exprimer le gradient en coordonnées cylindriques.

---

Voir le corrigé manuscrit.

**Exercice 4.** Soit  $U$  et  $V$  les parties de  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \quad \text{et} \quad V = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}.$$

1. Représenter sur deux figures les ensembles  $U$  et  $V$ .
2. Montrer que  $U$  et  $V$  sont des ouverts de l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}^2$ .
3. Montrer que : si  $(x, y) \in U$ , alors  $(x + y, xy) \in V$ .
4. Montrer que la fonction  $f : U \rightarrow V, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$  est bijective et calculer  $f^{-1}(s, p)$  pour chaque  $(s, p) \in V$ .
5. En utilisant le changement de coordonnées  $f$ , déterminer toutes les fonctions  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall x < y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 3(y - x)g.$$

- 
1. Voir la figure 1.
  2. Soit la fonction  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y - x$ . L'ensemble  $U$  est égal à  $u^{-1}(]0, +\infty[)$ . C'est l'image réciproque d'un ouvert de  $\mathbb{R}$  par une fonction continue. Donc c'est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .  
Soit la fonction  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (s, p) \mapsto s^2 - 4p$ . L'ensemble  $V$  est égal à  $v^{-1}(]0, +\infty[)$ . C'est l'image réciproque d'un ouvert de  $\mathbb{R}$  par une fonction continue. Donc c'est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
  3. Si  $(x, y) \in U$ , alors  $x \neq y$ , d'où  $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 > 0$ , donc  $(x + y, xy) \in V$ .

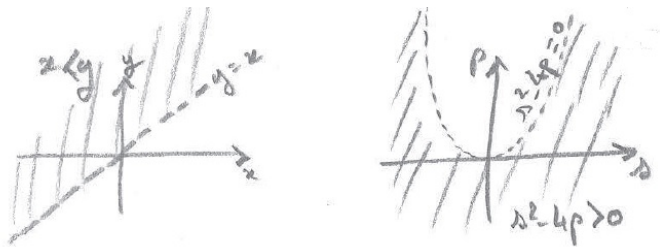


FIGURE 1 – LES PARTIES  $U$  ET  $V$  DU PLAN  $\mathbb{R}^2$

4. Soient  $(x, y) \in U$  et  $(s, p) \in V$  :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad f(x, y) = (s, p) &\iff \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \\
 &\iff x \text{ et } y \text{ sont les solutions de l'équation } X^2 - sX + p = 0 \\
 &\iff \{x, y\} = \left\{ \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}; \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right\} \quad \text{car } s^2 - 4p > 0 \\
 &\iff (**) \quad (x, y) = \left( \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right) \quad \text{car } x < y
 \end{aligned}$$

L'équation  $(*)$  a une unique solution, donc  $f$  est bijective.

D'après  $(**)$ ,  $f^{-1}(s, p) = \left( \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}; \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right)$ .

5. Les dérivées partielles des fonctions  $S : (x, y) \mapsto x + y$  et  $P : (x, y) \mapsto xy$  sont

$$\frac{\partial S}{\partial x} : (x, y) \mapsto 1 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial y} : (x, y) \mapsto 1 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial x} : (x, y) \mapsto y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} : (x, y) \mapsto x$$

et sont continues sur  $U$ , d'où les fonctions  $S$  et  $P$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . La fonction  $g = G \circ f$  vérifie  $G(s, p) = g(x, y)$ . Et  $G = g \circ f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  car  $g$  et  $f^{-1}$  le sont.

D'où (règle de la chaîne) :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial s} + y \frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial s} + x \frac{\partial G}{\partial p} \end{cases} .$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &= 3(y - x)g &\iff \frac{\partial G}{\partial p} &= 3G \\
 &&\iff \forall (s, p) \in V, \quad G(s, p) &= C(s) \cdot e^{3p}, \text{ où } C \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\
 &&\iff \forall (x, y) \in U, \quad g(x, y) &= C(x + y) \cdot e^{3xy}.
 \end{aligned}$$

### Exercice 5 (Différentielle de l'inversion).

Soit  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de l'espace vectoriel normé  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. (a) Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 (b) En se rappelant la comatrice, montrer que l'application  $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M = (m_{ij}) \mapsto M^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. (a) Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Montrer que :

$$(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij} + o(t)$$

et en déduire  $df(I_n) \cdot E_{ij}$ .

- (b) Calculer  $df(I_n) \cdot H$  pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et en déduire que

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - H + o(H).$$

- (c) Soit une matrice inversible  $A$ . Montrer que

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(H)$$

et en déduire  $df(A) \cdot H$ .

3. (a) Soit une application  $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  différentiable en  $A$ .

Montrer que l'application  $G : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto M \cdot g(M)$  est aussi différentiable en  $A$  et calculer  $dG(A) \cdot H$  pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (b) Retrouver ainsi l'expression de  $df(A) \cdot H$ .

1. (a) L'ensemble  $GL_n(\mathbb{R})$  est l'image réciproque  $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$  de l'ensemble  $\mathbb{R}^*$  par la fonction  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Or la fonction  $\det$  est continue et  $\mathbb{R}^*$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Donc  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 (b) L'inverse d'une matrice  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  s'écrit  $\frac{1}{\det M} N$ , où  $N$  est la comatrice de  $M$ . Chaque coefficient  $(M^{-1})_{ij}$  de la matrice  $M^{-1}$  est donc une fraction rationnelle des coefficients  $M_{ij}$  de  $M$  car, au numérateur,  $N_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  est un polynôme en les  $M_{ij}$  et, au dénominateur,  $\det M$  est aussi un polynôme en les  $M_{ij}$ . Donc la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

2. (a) Si  $i \neq j$ , alors  $(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$ .

Si  $i = j$ , alors  $(I_n + tE_{ii}) = \text{diag}(1, \dots, 1, 1+t, 1, \dots, 1)$ , d'où  $(I_n + tE_{ii})^{-1} = \text{diag}(1, \dots, 1, \frac{1}{1+t}, 1, \dots, 1)$ . Or  $\frac{1}{1+t} = 1 - t + o(t)$ . Donc  $(I_n + tE_{ii})^{-1} = I_n - tE_{ii} + o(t)$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , d'où elle est différentiable, d'où

$$df(I_n) \cdot E_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(I_n + tE_{ij}) - f(I_n)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-tE_{ij} + o(t)}{t} = -E_{ij}.$$

- (b) Toute matrice  $H$  s'écrit  $H = \sum_{i,j} h_{ij} E_{ij}$ . Or l'application  $df(I_n)$  est linéaire, d'où

$$df(I_n) \cdot H = \sum_{i,j} h_{ij} df(I_n) \cdot E_{ij} = - \sum_{i,j} h_{ij} E_{ij} = -H,$$

donc  $(I_n + H)^{-1} = f(I_n) + df(I_n) \cdot H + o(H) = I_n - H + o(H)$ .

- (c)  $(A + H)^{-1} = [A \cdot (I_n + A^{-1}H)]^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1} \cdot A^{-1}$ .

Or  $(I_n + A^{-1}H)^{-1} = I_n - A^{-1}H + o(A^{-1}H)$  d'après la question précédente.

D'où  $(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(A^{-1}H) \cdot A^{-1}$ .

Or un  $o(A^{-1}H) \cdot A^{-1}$  est aussi un  $o(H)$  ([Pourquoi?](#)) D'où  $(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(H)$ . Donc  $df(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$ .

3. (a)  $G(A + H) = (A + H) \cdot g(A + H)$  et  $g(A + H) = g(A) + dg(A) \cdot H + o(H)$ , d'où

$$G(A + H) = A \cdot g(A) + H \cdot g(A) + A \cdot dg(A) \cdot H + H \cdot dg(A) \cdot H + (A + H) \cdot o(H).$$

Or  $H \cdot dg(A) \cdot H + (A + H) \cdot o(H) = o(H)$ . ([Pourquoi?](#)) Et l'application  $H \mapsto H \cdot g(A) + A \cdot dg(A) \cdot H$  est linéaire. Donc  $G$  est différentiable en  $A$  et

$$dG(A) \cdot H = H \cdot g(A) + A \cdot dg(A) \cdot H.$$

- (b) Si  $g$  est la fonction  $f : A \mapsto A^{-1}$ , alors  $G$  est la fonction constante  $A \mapsto I_n$ . D'où  $dG(A) \cdot H = 0$ , d'où  $H \cdot f(A) + A \cdot df(A) \cdot H = 0$ , donc  $df(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$ .

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. On dit qu'une matrice  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  est stochastique ([▷ TD n° 4 exo 8 & TD n° 6 exo 6](#)) si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie convexe, fermée et bornée de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ .

2. **▷ exo 7 de l'annexe C.** Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte (i.e. fermée et bornée) mais pas connexe par arcs de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte et connexe par arcs de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ .

1. Montrons que l'ensemble des matrices stochastiques est convexe : soit  $\lambda \in [0, 1]$ , soient  $A$  et  $B$  deux matrices stochastiques. La matrice  $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$  est encore stochastique car :

- pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $c_{ij} = \lambda a_{ij} + (1 - \lambda)b_{ij}$  est positif car  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  le sont ;
- pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la somme  $\sum_{j=1}^n c_{ij}$  vaut 1 car elle est égale  $\lambda + (1 - \lambda)$ .

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $f_i : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $A \mapsto \sum_{j=1}^n a_{ij}$  est continue (car linéaire sur l'ev  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ , qui est de dimension finie). L'ensemble  $F_i = f_i^{-1}(\{1\})$  est donc un fermé de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  car c'est l'image réciproque du fermé  $\{1\}$  de  $\mathbb{R}$  par la fonction continue  $f$ .

De même, pour chaque  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , la fonction  $g_{ij} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $A \mapsto a_{ij}$  est continue, d'où  $G_{ij} = g_{ij}^{-1}([0, +\infty[)$  est fermé.

Donc l'ensemble  $(\cap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} F_i) \cap (\cap_{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} G_{ij})$  des matrices stochastiques est un fermé de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  car c'est une intersection de fermés.

AUTRE MÉTHODE (par la caractérisation séquentielle d'un fermé) — Soit une suite de matrices stochastiques  $A_k$  qui converge vers une matrice  $A$  :

- pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n (A_k)_{ij} = 1$  et cette égalité passe à la limite, d'où  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  ;
- pour chaque  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $(A_k)_{ij} \geq 0$  et cette inégalité large passe à la limite, d'où  $a_{ij} \geq 0$ .

D'où la matrice  $A$  est stochastique, donc l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ .

Pour montrer que l'ensemble des matrices  $n \times n$  stochastiques est une partie bornée de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ , on munit l'ev  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\| : A \mapsto \sum_{i,j} |a_{ij}|$  (ou de toute autre norme car toutes les normes sont équivalentes, cet ev étant de dimension finie). Pour toute matrice  $A$  stochastique,  $\|A\| = \sum_{i=1}^n 1$  car  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  et  $|a_{ij}| = a_{ij}$  par hypothèses. D'où  $\|A\| = n \leq n$  qui est un majorant.

2. Soit  $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  une matrice :  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff M \cdot M^T = I_n \iff f(M) \in \{I_n\}$ , en posant la fonction  $f : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto M \cdot M^T$ . Donc  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$  est un fermé car l'ensemble  $\{I_n\}$  est un fermé et la fonction  $f$  est continue. En effet  $f : M \mapsto (M, M^T) \rightarrow M \cdot M^T$  est la composée  $g \circ h$  des applications  $h : M \mapsto (M, M^T)$  et  $g : (M, N) \mapsto M \cdot N$ . La première est continue car linéaire sur l'ev  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie ; la seconde est continue car bilinéaire sur l'ev  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie.

Munissons l'ev  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  du produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^T)$  et donc de la norme  $\|M\| = \sqrt{\text{tr}(M \cdot M^T)}$ . Pour toute matrice  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $M \cdot M^T = I_n$ , d'où  $\|M\| = \sqrt{n}$  qui est un majorant. Donc l'ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est borné.

L'ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs car la fonction  $\det$  y prend les valeurs  $-1$  et  $+1$  sans passer par les valeurs intermédiaires. Par contre, l'ensemble  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs car on a montré (**▷ exo 7 de l'annexe C**) que  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = e^{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$ . Soit donc une matrice spéciale orthogonale : elle s'écrit  $e^A$ , où  $A$  est une matrice antisymétrique. Le chemin  $M : t \mapsto M(t) = e^{tA}$  connecte les matrices  $M(0) = I_n$  et  $M(1) = e^A$ , ce qui prouve que l'ensemble  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

## Exercice 7.

1. Dédurre de la concavité de la fonction  $\ln$  que :

$$\forall (a, b, c) \in ]0, +\infty[^3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

2. On note  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[^2$  par :  $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ . Préciser, pour chaque extremum local de la fonction  $f$ , si c'est un maximum ou un minimum et s'il est global.

**Exercice 8.** Soient une matrice carrée  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  symétrique définie positive, une matrice colonne  $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  et un réel  $c \in \mathbb{R}$ . On note  $E$  l'evn  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  et on définit la fonction

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^T A x - 2b^T x + c.$$

1. Montrer que  $f$  est différentiable sur  $E$  et que, pour tout  $x \in E$  :

$$\forall h \in E, df(x) \cdot h = 2(Ax - b)^T h.$$

2. Etudier les extrema de la fonction  $f$ .

$$\begin{aligned} \text{Soit } h \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) : f(x+h) &= (x+h)^T A(x+h) - 2b^T(x+h) + c \\ &= f(x) + 2(Ax - b)^T h + h^T A h \text{ car } x^T A h = h^T A x \\ &= f(x) + \ell(h) + q(h) \end{aligned}$$

D'une part,  $\ell : h \mapsto 2(Ax - b)^T h$  est linéaire.

D'autre part,  $h^T A h = o(h)$ . En effet,  $|q(h)| \leq \|h\| \cdot \|Ah\|$  d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et  $\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|$ . D'où  $|h^T A h| \leq \|A\| \cdot \|h\|^2$ .

D'où  $\ell = df(x)$  et il existe un unique point critique  $x_0$  de  $f$  : c'est  $x_0 = A^{-1}b$  car la matrice  $A$  est inversible comme toute matrice symétrique définie positive.

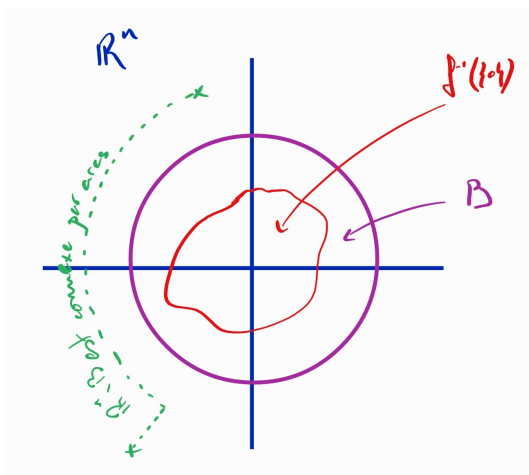
Si la fonction  $f$  possède un extremum, c'est en  $x_0$ . Or, pour tout  $h$ ,  $f(x_0 + h) = f(x_0) + h^T A h \geq f(x_0)$ . En effet,  $h^T A h$  est positif car la matrice  $A$  est symétrique positive.

Donc  $f$  possède un unique extremum en  $x_0 = A^{-1}b$ . C'est un minimum et il est global.

**Exercice 9.** Soient un entier  $n \geq 2$  et une fonction  $f$  continue de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $f^{-1}(\{0\})$  est un compact non vide. Montrer que  $f$  admet un extremum global. Que dire si  $n = 1$  ?

L'ensemble  $f^{-1}(\{0\})$  est compact, donc fermé borné, il est donc inclus dans une boule fermée  $B$  centrée en 0.

L'application  $f|_B$  possède un minimum global  $m$  et un maximum global  $M$  car elle est continue sur le compact  $B$ . De plus,  $f$  s'annule sur  $B$ , donc  $m \leq 0$  et  $M \geq 0$ .



L'ensemble  $A = \mathbb{R}^n \setminus B$  est connexe par arcs, la fonction  $f$  y est continue et ne s'y annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle n'y change donc pas de signe. Si  $f|_A > 0$ , alors  $m$  est le minimum global de  $f$ . Si  $f|_A < 0$ , alors  $M$  est le maximum global de  $f$ .

Si  $n = 1$ , la propriété est fautive car la fonction identité  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$  fournit un contre-exemple.

**Exercice 10.** Soient  $S$  la surface d'équation  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$  dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Montrer que la surface  $S$  est bornée.
2. Déterminer trois plans de symétrie de la surface  $S$ .
3. Montrer que, pour tout  $(x, y, z) \in S$ ,  $x + y + z \leq 1$ . En déduire que la surface  $S$  est à l'intérieur d'un tétraèdre. Représenter graphiquement la surface  $S$  et ce tétraèdre.
4. Soit  $A(a, b, c)$  un point de la surface  $S$  tel que ni  $a$ , ni  $b$ , ni  $c$  n'est nul. Quelle est l'équation du plan  $P(a, b, c)$  tangent à la surface  $S$  au point  $A$ ?
5. On note  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  les trois réels tels que le plan  $P(a, b, c)$  coupe l'axe des  $x$  en  $x = x_0$ , l'axe des  $y$  en  $y = y_0$  et l'axe des  $z$  en  $z = z_0$ . Calculer  $x_0 + y_0 + z_0$  et montrer que cette somme ne dépend pas de  $(a, b, c)$ .

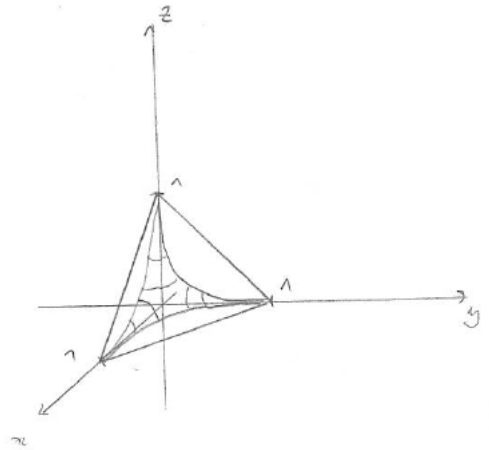


FIGURE 2 – LE TÉTRAÈDRE, LA SURFACE  $S$  & SES COURBES D'INTERSECTION AVEC LES 3 PLANS DE COORDONNÉES

1.  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  et  $\sqrt{z}$  sont positifs et  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$  donc  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  et  $\sqrt{z}$  sont dans  $[0, 1]$  donc  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont dans  $[0, 1]$  donc la surface est bornée.
2. Les rôles de  $x$ ,  $y$  sont les mêmes (on peut les échanger sans changer l'équation de  $S$ ), d'où  $(x, y, z) \in S \implies (y, x, z) \in S$  donc  $x = y$  est l'équation d'un plan de symétrie de  $S$ . De même  $x = z$  et  $y = z$  sont les équations de deux autres plans de symétrie de  $S$ .
3. Si  $(x, y, z)$  est un point de  $S$ , alors  $x \leq \sqrt{x}$ ,  $y \leq \sqrt{y}$  et  $z \leq \sqrt{z}$  donc  $x + y + z \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ . La surface  $S$  est incluse dans le tétraèdre de sommets  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . Voir la figure 2.
4. L'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$  est de classe  $C^1$  et la surface  $S$  est la surface de niveau 1 de  $f$ , donc le plan  $P(a, b, c)$  tangent à  $S$  au point  $A(a, b, c)$  est le plan passant par  $A$  et orthogonal au gradient de  $f$  en  $A$ . Or  $\nabla f(a, b, c) = \left( \frac{1}{2\sqrt{a}}, \frac{1}{2\sqrt{b}}, \frac{1}{2\sqrt{c}} \right)$ , d'où

$$M(x, y, z) \in P(a, b, c) \iff \vec{AM} \perp \nabla f(A) \iff \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + \frac{1}{2\sqrt{b}}(y-b) + \frac{1}{2\sqrt{c}}(z-c) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{a}}x + \frac{1}{\sqrt{b}}y + \frac{1}{\sqrt{c}}z = 1.$$

5. Le plan  $P(a, b, c)$  coupe l'axe des  $x$  en le point  $(x_0, 0, 0)$  tel que  $\frac{1}{\sqrt{a}}x_0 = 1$ , c'est-à-dire  $x_0 = \sqrt{a}$ . De même,  $y_0 = \sqrt{b}$  et  $z_0 = \sqrt{c}$ , d'où  $x_0 + y_0 + z_0 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ . Donc  $x_0 + y_0 + z_0$  ne dépend pas de  $(a, b, c)$ .