

F E U I L L E D E T . D . N° 1 6

Équations différentielles

Déjà vu sur les équations différentielles :

- et la diagonalisation ▷ [IV.2](#) ou la trigonalisation ▷ [TD4.9 & Kdo du 14/10/2025](#) ;
- et les séries entières ▷ [TD9.5&8, Kdo du 16/12/2025](#) ;
- et les intégrales à paramètre ▷ [TD13.5&6](#) ;
- et les révisions ▷ [exo 8 du thème n° 2, exo 11&12 du thème n° 3](#).

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $x'' - 3x' + 2x = te^{2t}$ et $x'' - 2\sqrt{2}x' + 2x = 6$;
2. $(t^2 + 1)^2 x'' + 2t(t^2 + 1)x' + x = 0$ en cherchant d'abord une solution de la forme $(1 + t^2)^\alpha$.

Exercice 2 (séries entières). On note F l'application

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

1. Montrer que la fonction F est une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) = -2xy(x) + 1.$$

2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E) .
3. Montrer que la fonction qui, à tout réel x , associe $\int_0^x e^{t^2} dt$ est développable en série entière sur $] -\infty, +\infty[$ et déterminer les coefficients de ce développement.
4. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n de ce développement.
5. Pour tout entier naturel p , exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p .
6. En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la somme

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3 (intégrales impropres & variation de la constante – tiré d'un oral CCP PC 2010).

Soient l'équation différentielle $(E) : y' - y = e^{-x^2}$ et la fonction $u : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2-t} dt$.

1. Montrer que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Exprimer les solutions de (E) en fonction de u .
3. Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro en $-\infty$.
4. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui a pour limite zéro en $+\infty$.

Exercice 4 (diagonalisation & variation des constantes). Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y + z + e^t \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

Exercice 5. Soient les équations différentielles

$$(E) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad (E_0) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

1. Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) de (E_0) .
2. En déduire la solution générale sur $]0, +\infty[$ de (E_0) .
3. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ ainsi que le rayon de convergence de cette série entière.
4. (a) Rechercher le développement en série entière d'une solution f de (E) et calculer le rayon de convergence R de cette série entière.
(b) Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, 0[\cup]0, +R[$ à l'aide de fonctions usuelles.
5. Quelle est la solution générale de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, 1[$?

Exercice 6. Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux fonctions continues $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ et l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 sans second membre

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0.$$

Soient $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions sur I de cette équation. La fonction

$$W : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

est appelée le **wronskien** de x_1 et x_2 .

1. Montrer que W est dérivable et que, pour tout $t \in I$,

$$W'(t) = -a(t)W(t).$$

2. Montrer que : si les solutions x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes, alors leur wronskien ne s'annule jamais.
3. Montrer que, si x_1 ne s'annule pas, alors

$$\forall t \in I, \left(\frac{x_2}{x_1} \right)'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}.$$

4. Soient $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes. Montrer que x_1 et x_2 n'ont pas de racine commune. Et que, entre deux racines distinctes de x_2 (si elles existent), x_1 possède au moins une racine.
5. On suppose connue une solution $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annulant pas. En utilisant le wronskien, déterminer une solution $x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ linéairement indépendante de x_1 .